



Modélisation PIC : principe et application aux plasmas froids

Serge Huberson

Institut P' • UPR CNRS 3346
SP2MI • Téléport 2
11, Boulevard Marie et Pierre Curie • BP 30179
F86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL Cedex



UPR3346-POW02

Méthode PIC pour la mécanique des fluides

- la fondation : F. Harlow et la méthode MAC
- Histoire et Développement : de PIC à VIC
- trois bonnes raisons d'utiliser la méthode PIC
- à faire pour demain...

0. la fondation : F. Harlow et la méthode MAC

0. la fondation

La méthode MAC : [F. Harlow \(1964\)](#)

1. conservation de la masse :

– particules lagrangienne (vitesse de l'écoulement) $P_i : \underline{X}_i, M_i$

- \underline{X}_i : position de la particule

- M_i : masse transportée : $M_i = \iiint_{P_i} \rho(\underline{x}, t) d\underline{x}$

$$\frac{d\underline{X}_i}{dt} = \underline{U}(\underline{X}_i), \quad \frac{dM_i}{dt} = 0$$

0. la fondation

La méthode MAC :

- interpolation particule \rightarrow grille : masse volumique ρ sur la grille
- affectation de la masse de la particule au nœud du maillage le plus proche (**NGP** : *Nearest Grid Point*)

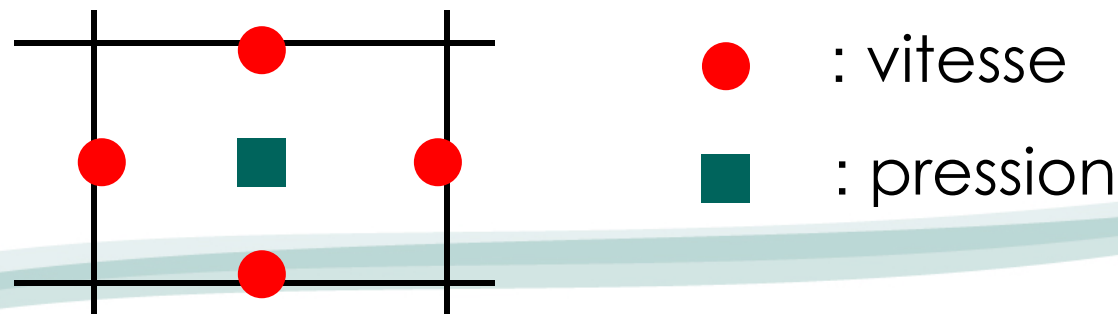
0. la fondation

La méthode MAC

2. conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p) = \nu \Delta \underline{u}$$

- différences finies sur un maillage
- condition de compatibilité vitesse-pression
→ maillages décallés



0. la fondation

conclusions :

- terminologie : la méthode MAC est la méthode de maillages décallés
- bases mathématiques (condition inf-sup) démontrées ultérieurement
- stabilité inconditionnelle du transport (lagrangien) de masse
- première méthode « hybride » particules/maillage

0. la fondation

les suites :

- amélioration de la projection sur le maillage : NGP (ordre 1) → CIC (ordre 2)
- transport lagrangien de la quantité de mouvement (PIC, Flux corrigés, ...)
- adaptation à la mécanique des fluides de PIC à VIC....

1. Histoire et Développements de PIC à VIC

1- la méthode vortex

Rosenhead (1932), Westwater (1936)

Hypothèses

- « hydrodynamique » = approximation incompressible
- écoulements non confinés
- fluide parfait

Equations

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p) = 0$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{u}) = 0$$

1- la méthode vortex

1.1 transport du tourbillon

$$\text{div}(\underline{u}) = 0, \quad \text{rot}(\underline{u}) = \underline{\omega}$$

$$\underline{\text{rot}} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p) \right) = \dots$$

$$\dots \quad \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) + \underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = 0$$

1- la méthode vortex

1.1 transport du tourbillon

$$\text{div}(\underline{u}) = 0, \quad \text{rot}(\underline{u}) = \underline{\omega}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p) \right) = \dots$$

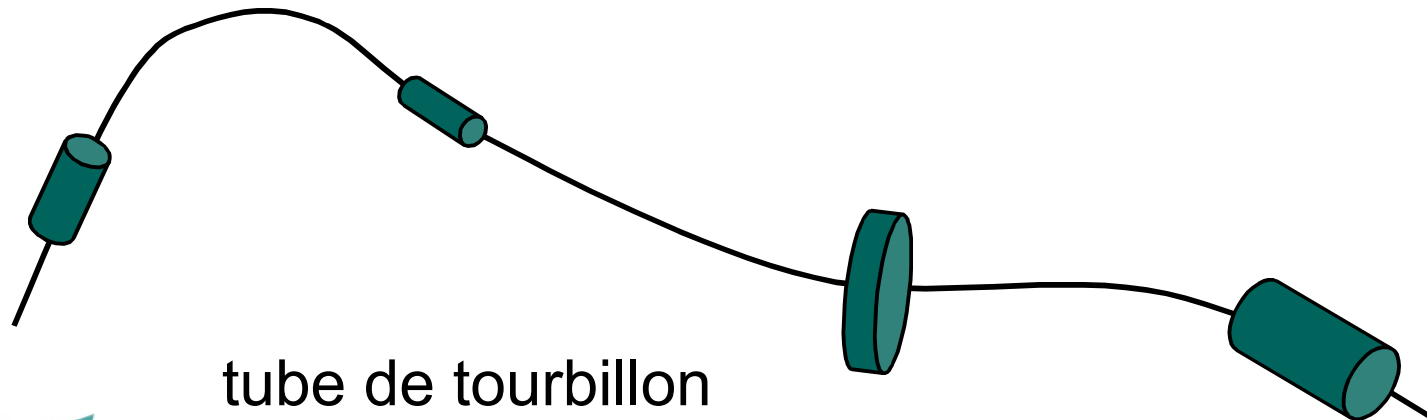
$$\dots \quad \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) + \underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = 0$$

Déformation =

« Stretching »

→ alignement

contraction/dilatation



tube de tourbillon

1- la méthode vortex

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) + \underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = 0$$

$$\underline{\text{div}}(\underline{u}) = 0, \quad \text{rot}(\underline{u}) = \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\underline{\omega}(\underline{x}', t) \wedge (\underline{x}' - \underline{x})}{\|\underline{x}' - \underline{x}\|^3} d\underline{x}' + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{x}, t))$$

décomposition de Helmholtz

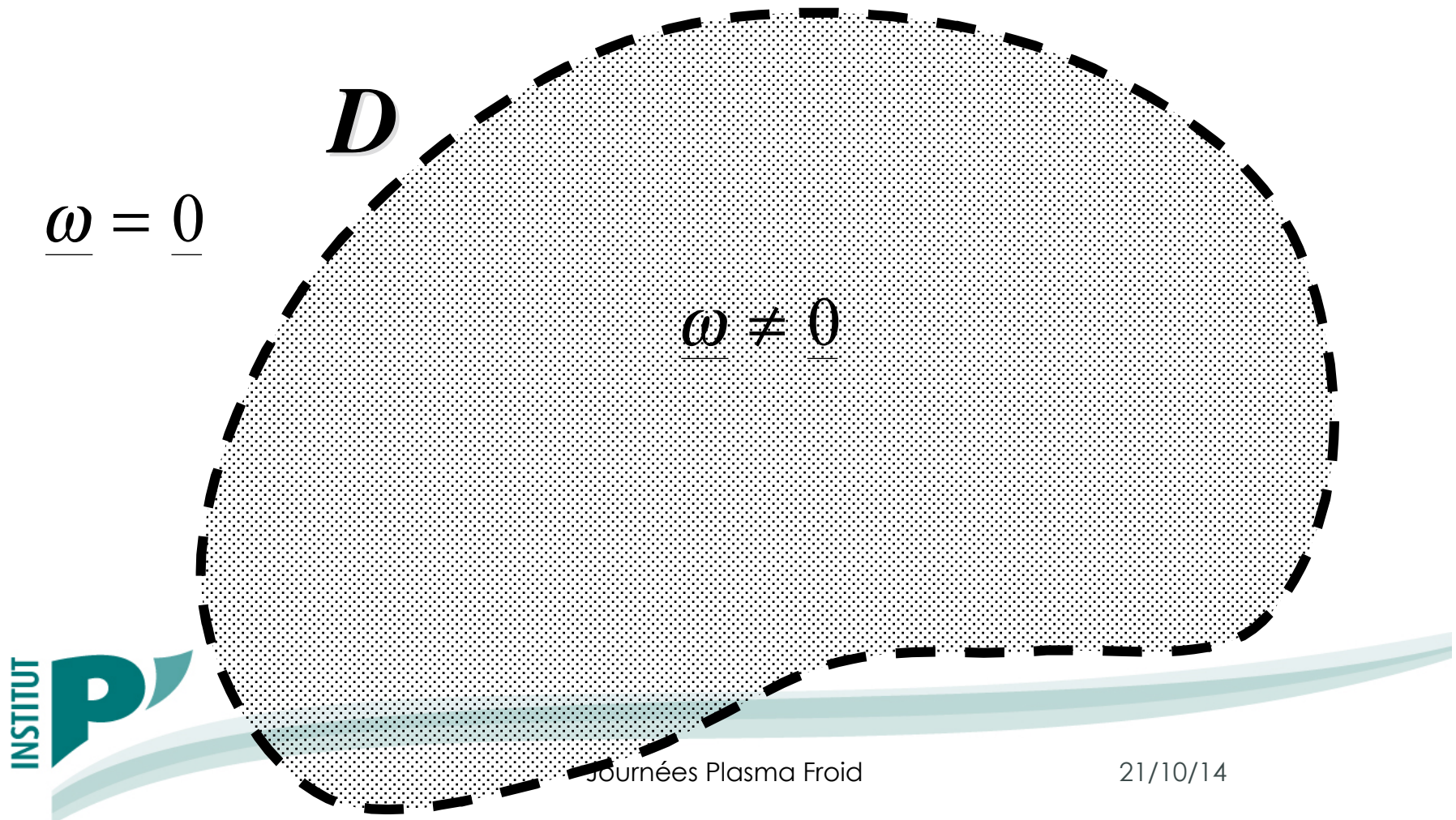
- écoulements plans :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) = 0$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\omega(\underline{x}', t) \wedge (\underline{x}' - \underline{x})}{\|\underline{x}' - \underline{x}\|^2} d\underline{x}' + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{x}, t))$$

1- la méthode vortex

1.2 discrétisation particulière



1- la méthode vortex

1.2 discrétisation particulaire

initialisation :

$$\underline{X}_i(t_0) = \frac{\iiint_{P_i} \underline{x} d\underline{x}}{\iiint_{P_i} d\underline{x}}$$

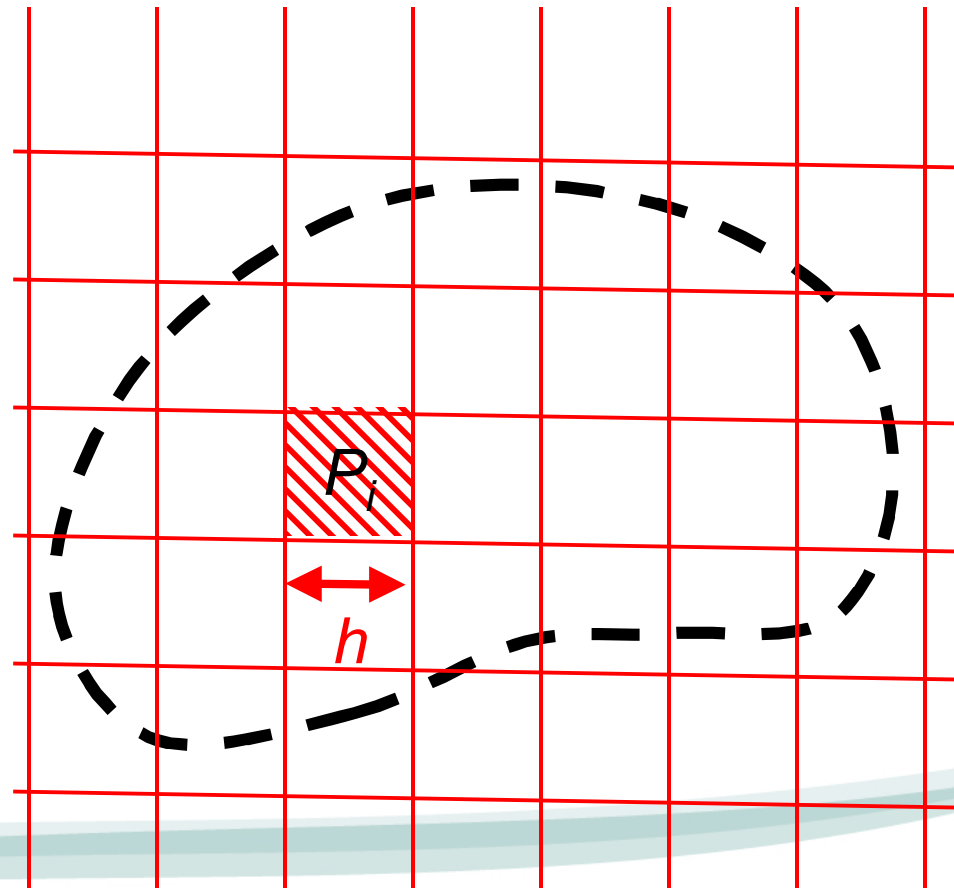
$$\Omega_i = \iiint_{P_i} \underline{\omega}(\underline{x}, t_0) d\underline{x}$$

2 paramètres :

ε : régularisation

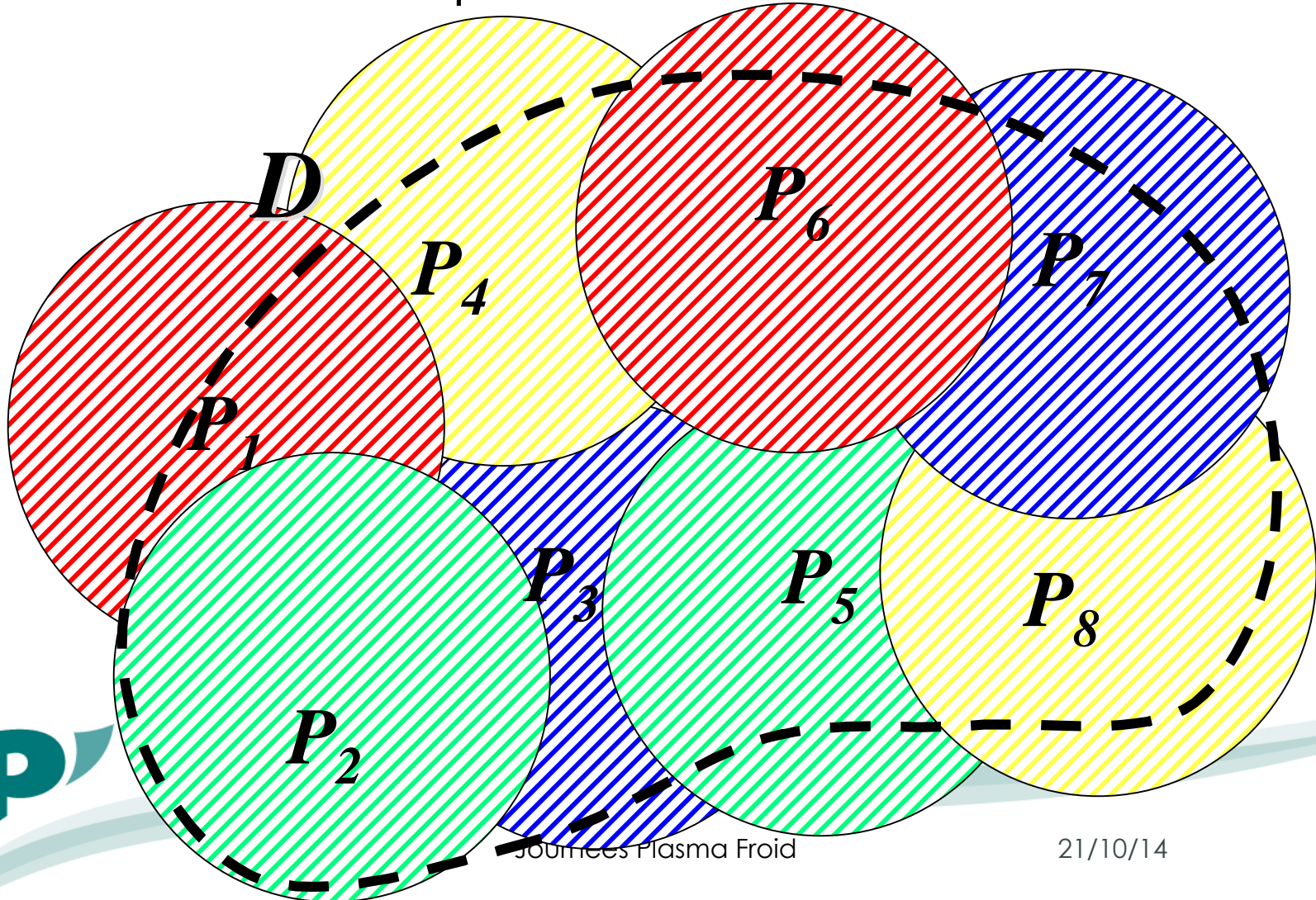
h : distance

inter-particules



1- la méthode vortex

1.2 discrétisation particulaire

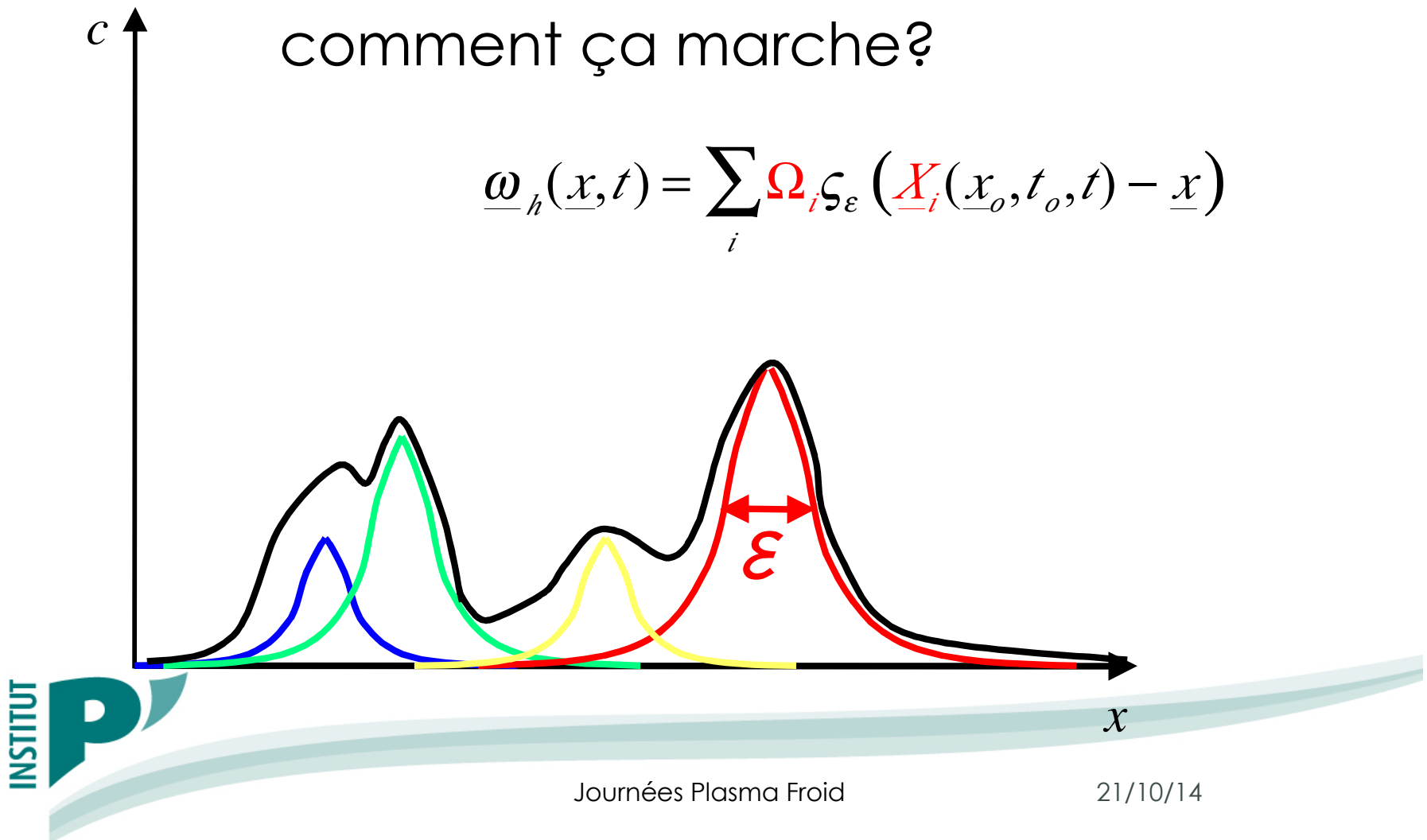


1- la méthode vortex

1.2 discrétisation particulière

comment ça marche?

$$\underline{\omega}_h(\underline{x}, t) = \sum_i \Omega_i \zeta_\varepsilon(\underline{X}_i(\underline{x}_o, t_o, t) - \underline{x})$$



1- la méthode vortex

1.2 discrétisation particulière écoulement plan

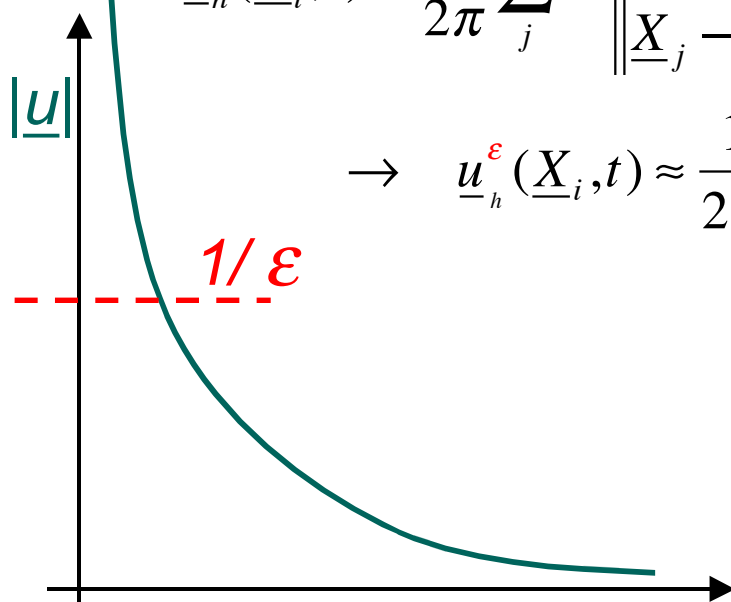
- $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{d\underline{X}_i}{dt} \approx \underline{u}_h(\underline{X}_i, t) \\ \frac{d\underline{\Omega}_i}{dt} = 0 \end{cases}$
- $\underline{u}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\underline{\omega}(\underline{x}', t) \wedge (\underline{x}' - \underline{x})}{\|\underline{x}' - \underline{x}\|^2} d\underline{x}' + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{x}, t))$
 $\rightarrow \underline{u}_h(\underline{X}_i, t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{\underline{\Omega}_j \wedge (\underline{X}_j - \underline{X}_i)}{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\|^2} + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{X}_i, t))$

1- la méthode vortex

1.3 deux problèmes

– régularisation : [Chorin \(1974\)](#)

$$\underline{u}_h(\underline{X}_i, t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{\underline{\Omega}_j \wedge (\underline{X}_j - \underline{X}_i)}{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\|^2} + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{X}_i, t))$$



$$\rightarrow \underline{u}_h^\epsilon(\underline{X}_i, t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\| < \epsilon} \frac{\underline{\Omega}_j \wedge (\underline{X}_j - \underline{X}_i)}{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\| \epsilon}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\| \geq \epsilon} \frac{\underline{\Omega}_j \wedge (\underline{X}_j - \underline{X}_i)}{\|\underline{X}_j - \underline{X}_i\|^2} + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{X}_i, t))$$

1- la méthode vortex

1.3 deux problèmes

– coût des calculs

évaluation d'une somme :

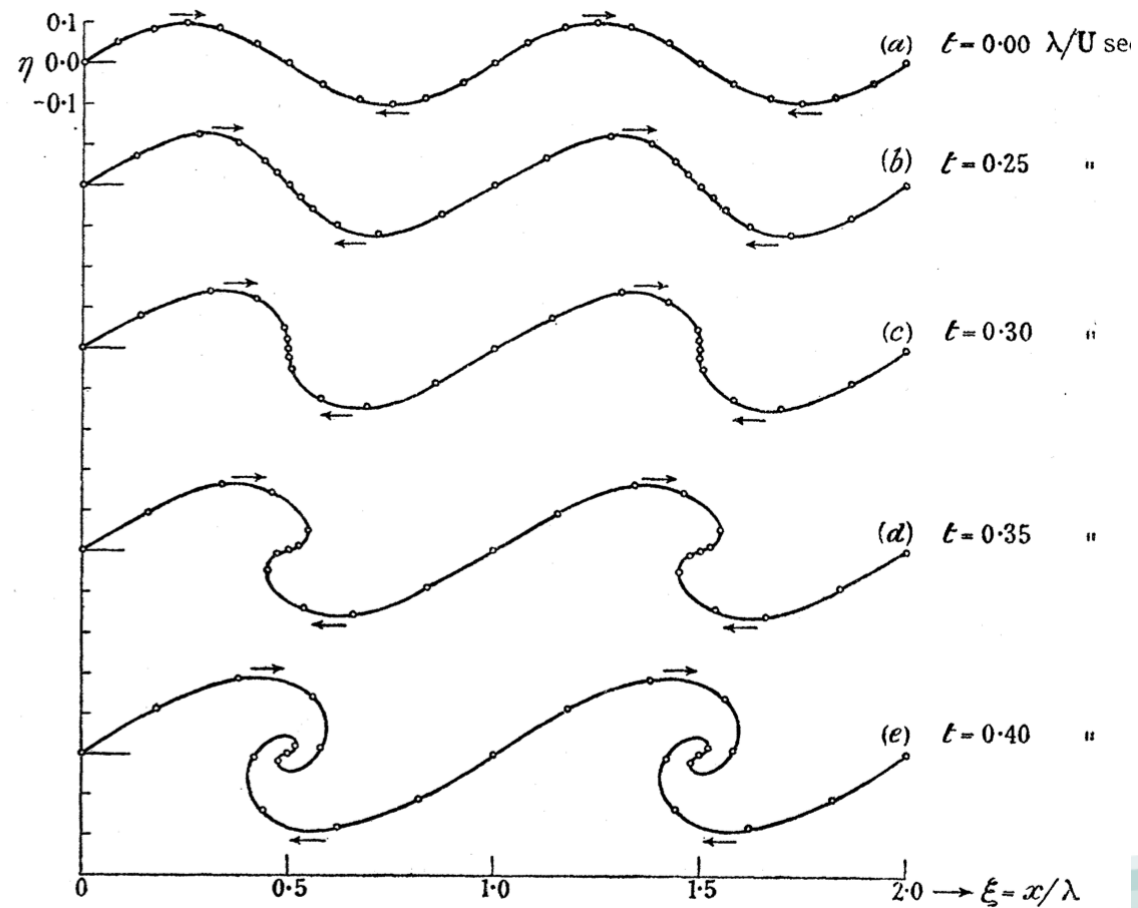
N particules →

- vitesse : $\approx N^2$ opérations
- « tracker » : $\approx N$ opérations

méthode différences finies/ éléments finis :
NLogN opérations!

1- la méthode vortex

Rosenhead (1932) : Kelvin-Helmholtz



1- la méthode vortex

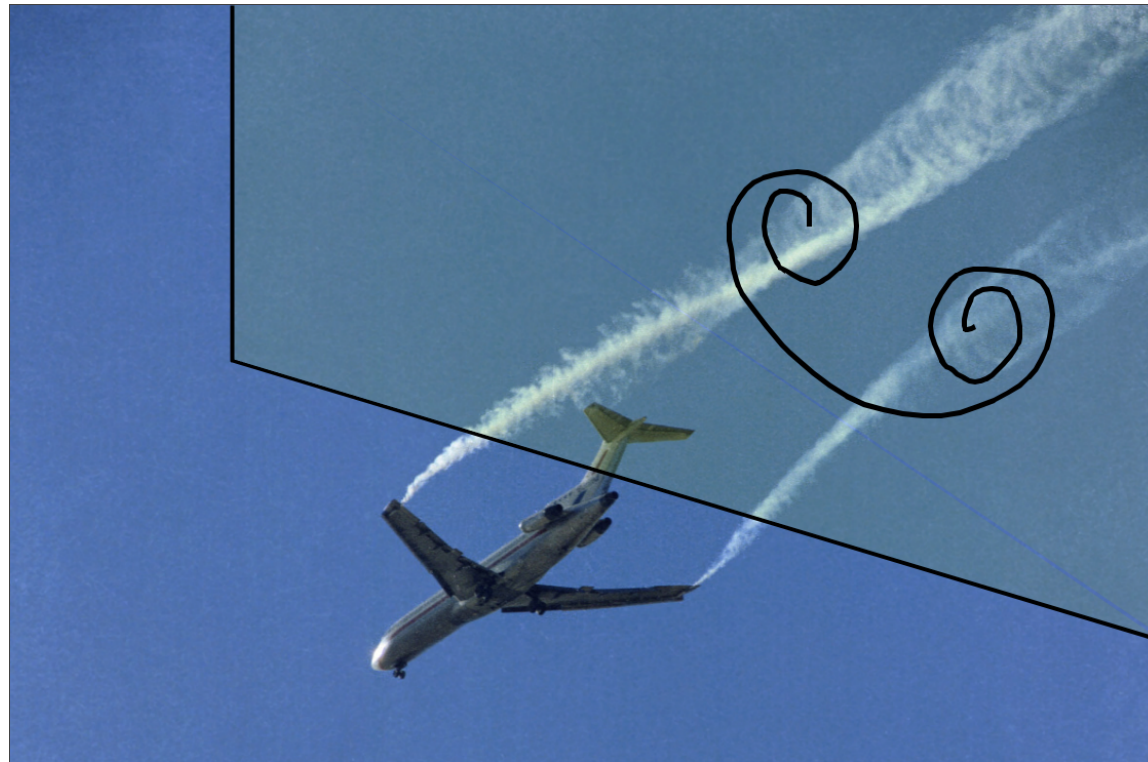
Westwater (1936) : problème de sillage



Dryden Flight Research Center ECN 3831 Photographed 1974
B-727 vortex study NASA photo

1- la méthode vortex

Westwater (1936) : problème de sillage



Plan de Treftz

1- la méthode vortex

Westwater (1936) : problème de sillage

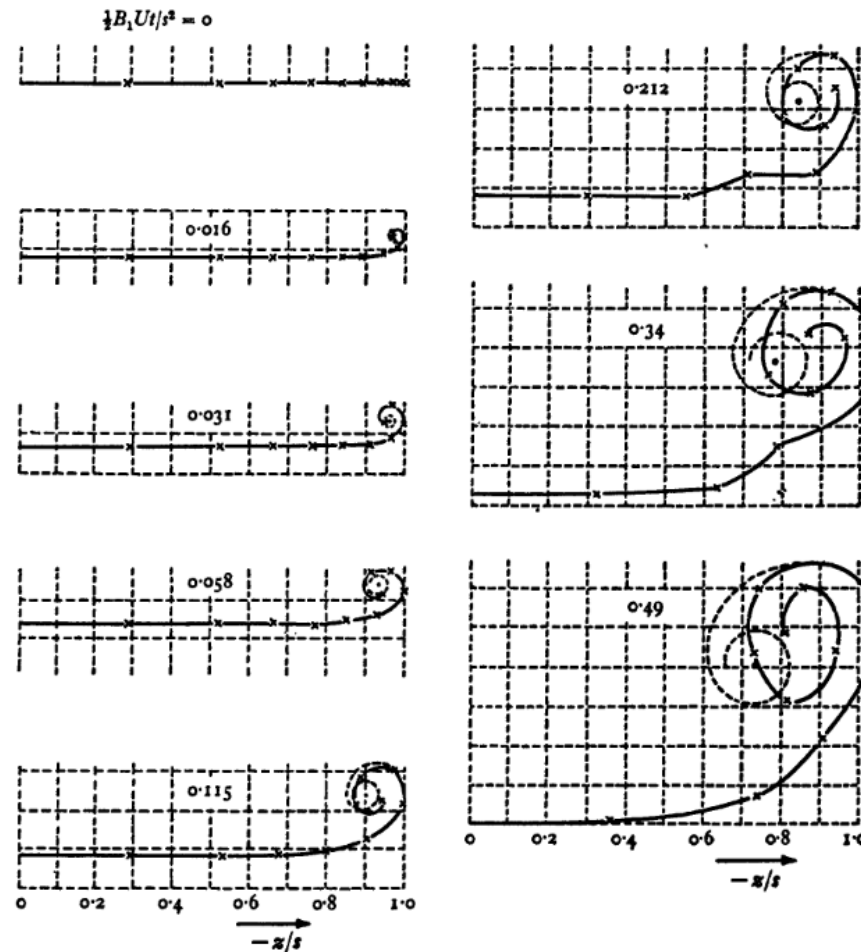


Figure 7.8.5. Calculated positions of a group of ten identical point vortices, distributed along a straight line at $t = 0$ in such a way as to represent approximately (one half of) the trailing sheet vortex from an elliptically loaded wing (see (7.8.12)). The broken curves are obtained from an analytical description of the flow near the edge of the sheet vortex (located at the dot), where the numerical integration is inaccurate. (From Westwater 1936.)

2- La méthode VIC

J.P. Christiansen (1974), G. Baker (1982)

la solution !

- $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) = 0$
 $\underline{\text{div}}(\underline{u}) = 0, \quad \underline{\text{rot}}(\underline{u}) = \underline{\omega}$
 $\Rightarrow \begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\text{rot}}(\underline{\psi}(\underline{x}, t)) + \underline{\text{grad}}(\varphi(\underline{x}, t)) \\ \Delta \underline{\psi} = -\underline{\omega} \end{cases}$
- domaine non borné D
 - approximation bornée D_-
 - conditions aux limites?

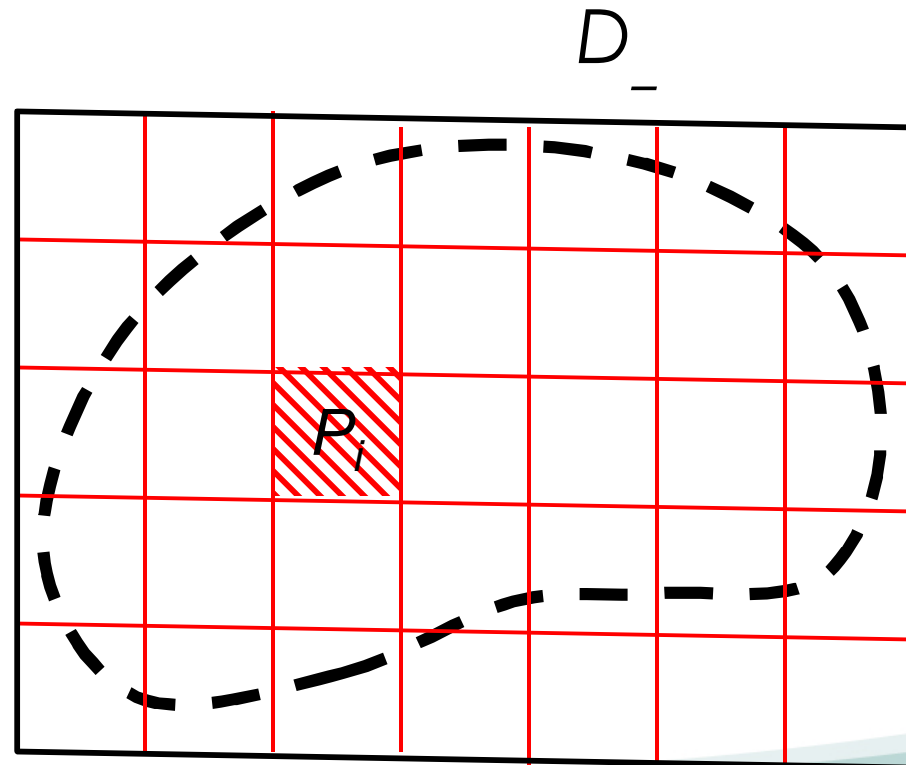
2- La méthode VIC

2.1 discrétisation particulière

initialisation :

$$\underline{X}_i(t_0) = \frac{\iiint_{P_i} \underline{x} d\underline{x}}{\iiint_{P_i} d\underline{x}}$$

$$\Omega_i = \iiint_{P_i} \underline{\omega}(\underline{x}, t_0) d\underline{x}$$



2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

$$\underline{\omega}_h(\underline{x}, t) = \sum_i \Omega_i \zeta_\varepsilon(\underline{X}_i(\underline{x}_o, t_o, t) - \underline{x})$$

$$\rightarrow \underline{\omega}_h(\underline{x}_{kl}, t) = \sum_i \Omega_i W(\underline{X}_i(\underline{x}_o, t_o, t) - \underline{x}_{kl})$$

- \underline{x}_{kl} : points de la grille
- W : approximation de Dirac sur la grille

$$\begin{cases} W(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl}) = W_x(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl}) W_y(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl}) \\ W_x(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl}) = \chi * \chi \end{cases}$$

χ : fonction indicatrice de la maille

$\chi * \chi$: produit de convolution

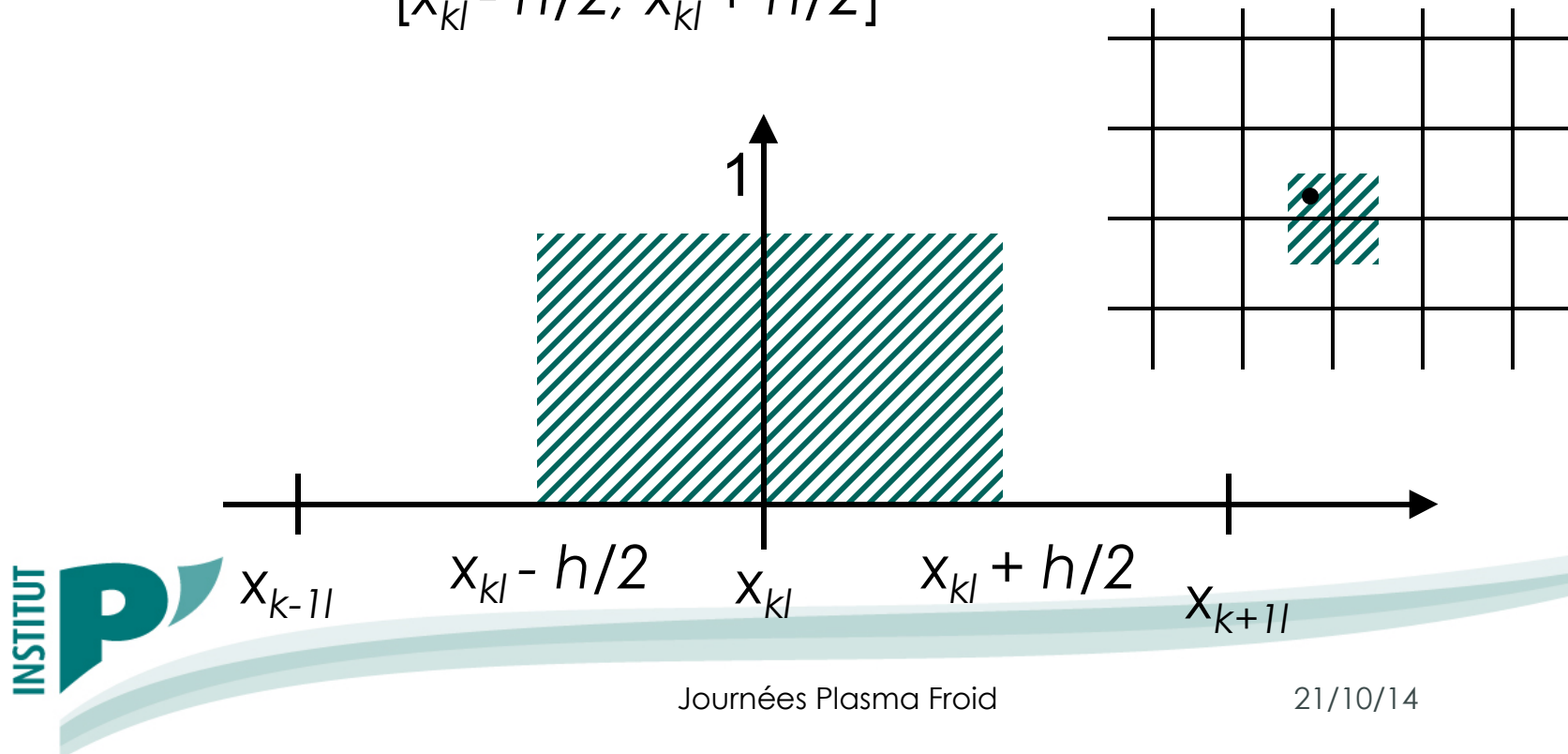
2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

- **NGP** : *Nearest Grid Point*

- $W(x)=\chi$: fonction indicatrice de l'intervalle :

$$[x_{kl} - h/2, x_{kl} + h/2]$$

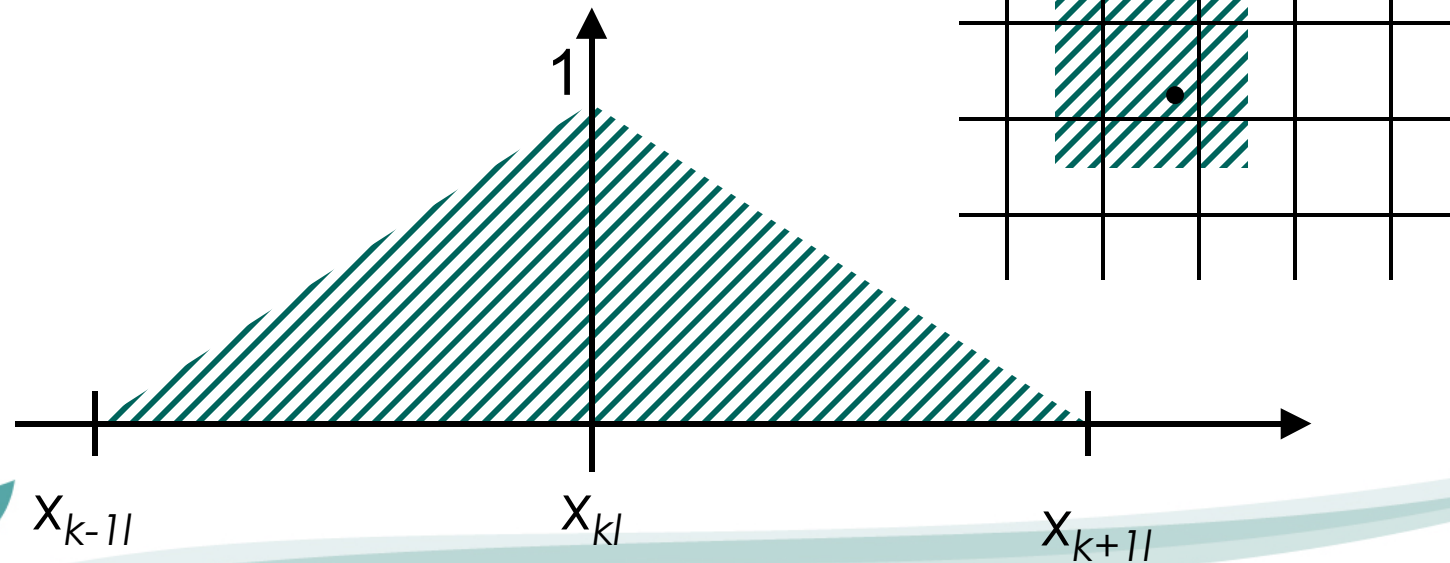


2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

- **CIC** : *Cloud in Cells*

- $$W(x) = \chi * \chi = \int_{x_{kl}-h}^{x_{kl}+h} \chi(x)\chi(x-x_{kl})dx \int_{x_{kl}-h}^{x_{kl}+h} \chi(y)\chi(y-y_{kl})dy$$

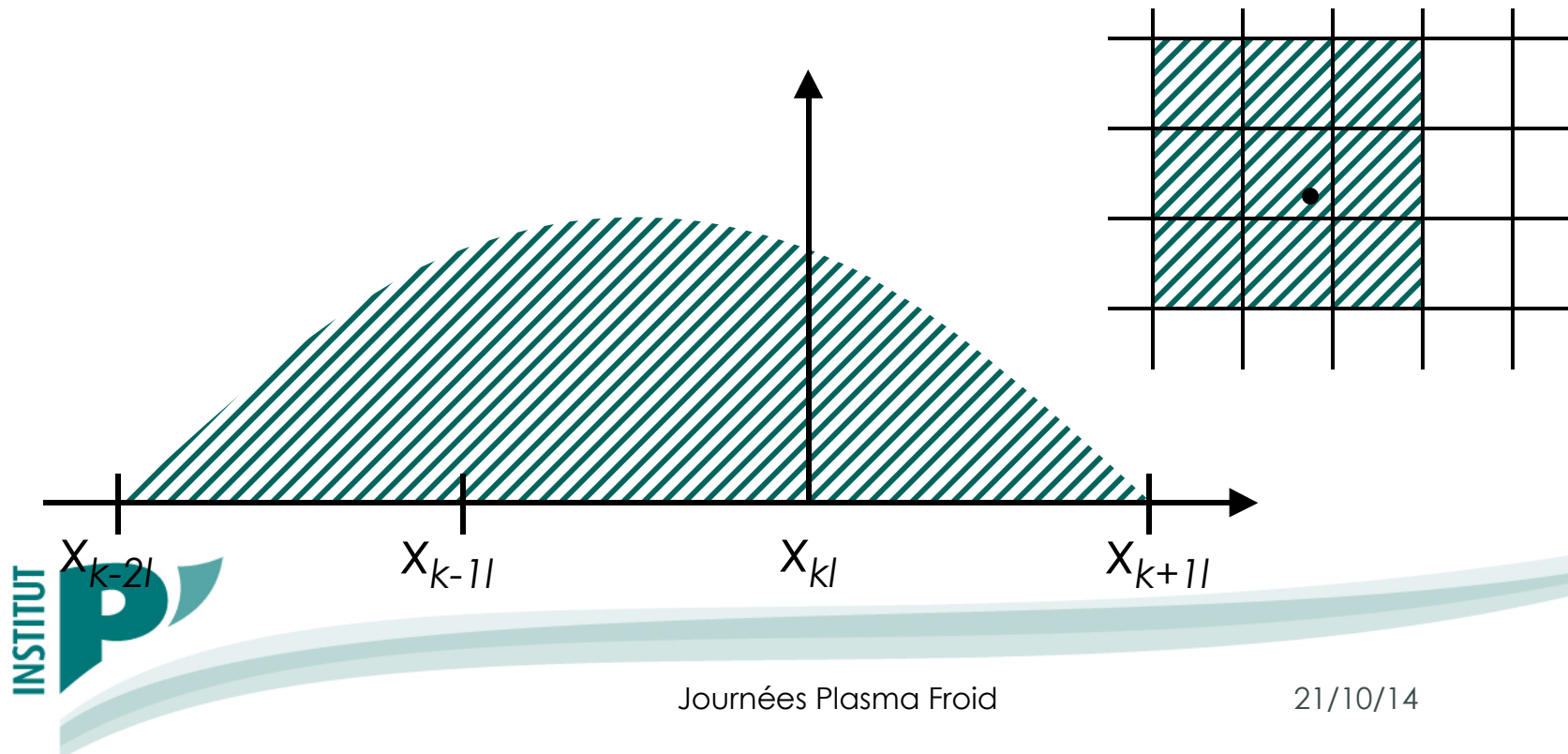


2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

- **TSC** : *Triangular shaped cloud*

- $W(x) = \chi * \chi * \chi$



2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

conséquences :

1. l'interpolation « remplace » la régularisation
2. l'ordre de W est déterminé par le nombre de facteur du produit de convolution

$$W_x(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl}) = \underbrace{\chi * \chi * \dots * \chi}_N$$

3. interpolation inverse grille/ particules

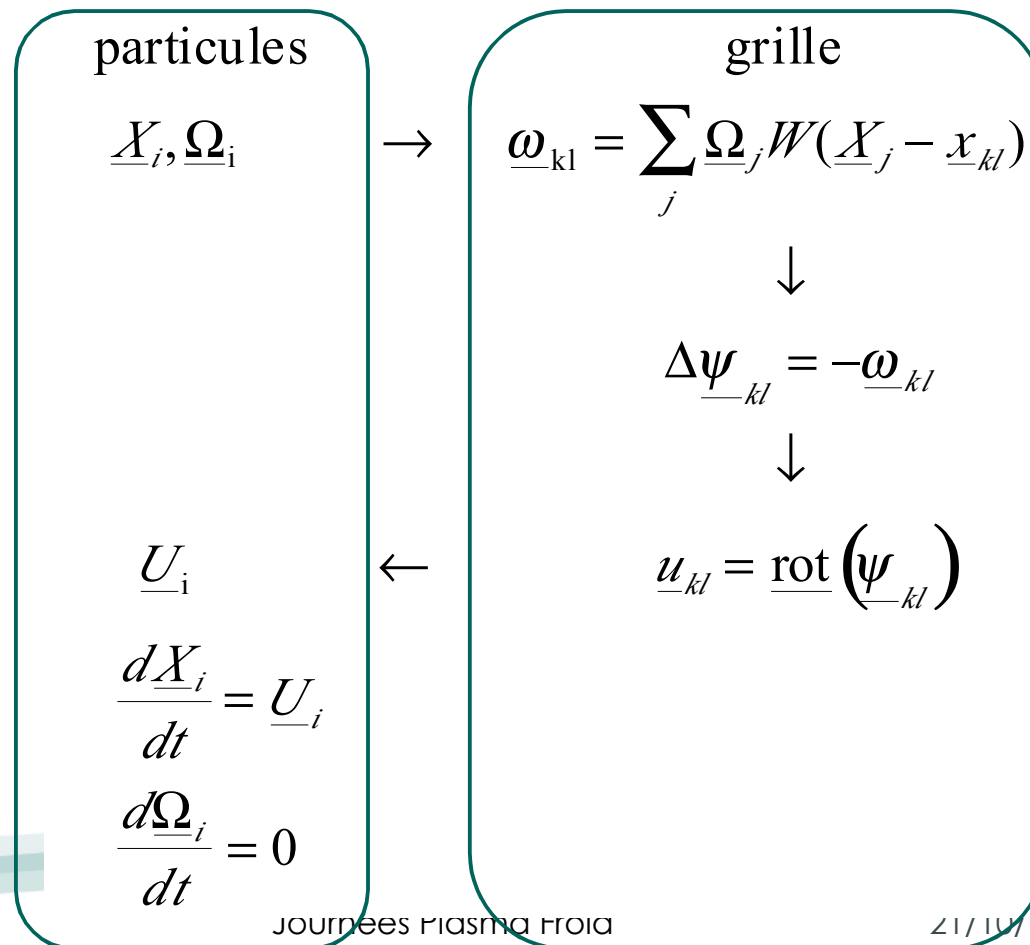
$$\Omega_i = \sum_{kl} \omega_h(\underline{x}_{kl}, t) W(\underline{X}_i - \underline{x}_{kl})$$

2- La méthode VIC

2.2 interpolation particules/grille

1- vitesse : différences finies...

2- transport



2- La méthode VIC

2.3 conséquences :

2 problèmes, 2 solutions

- l'interpolation remplace la régularisation
- coût CPU : $\alpha M + \beta N \text{Log}(N)$

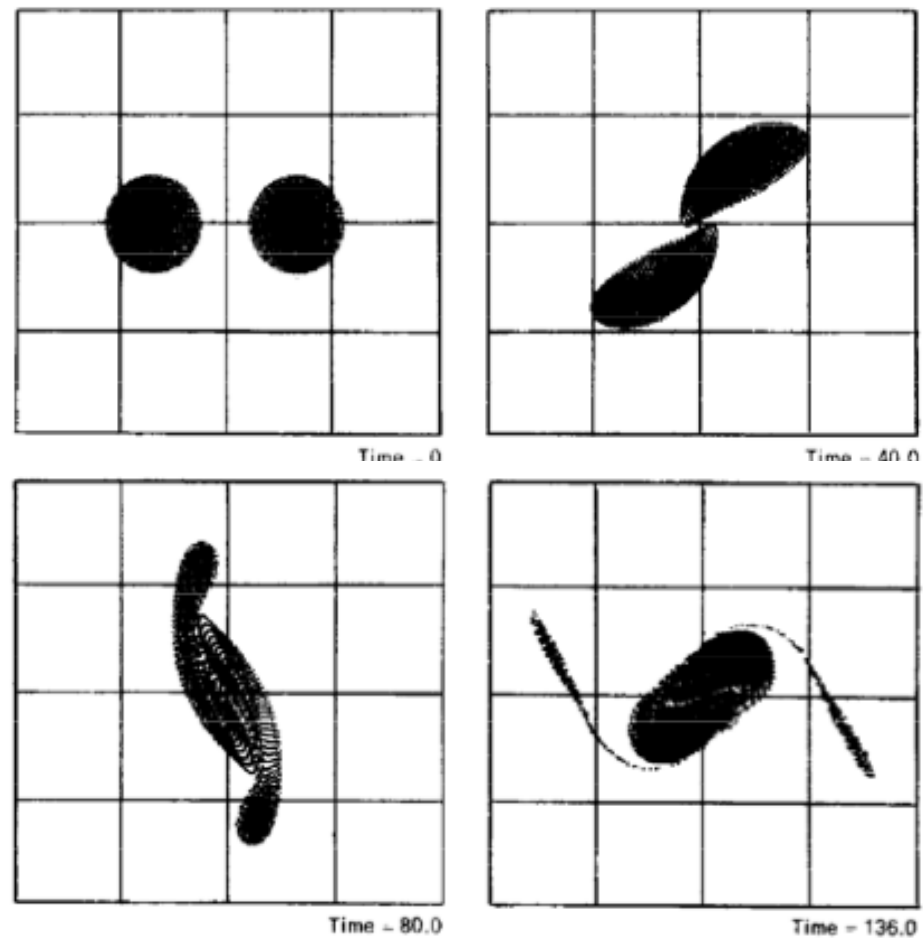
2 difficultés nouvelles :

- influence de la grille ~ on perd un ordre
- conditions aux limites extérieures ~
approximation pour une grille assez grande :

$$u_h|_{\partial D} \approx \frac{\underline{\Gamma}}{2\pi r}, \quad \underline{\Gamma} = \iint_D \underline{\omega}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

2- La méthode VIC

J.P. Christiansen (1974) : coalescence de tourbillons



2- La méthode VIC

G. Baker (1982)

Sillage

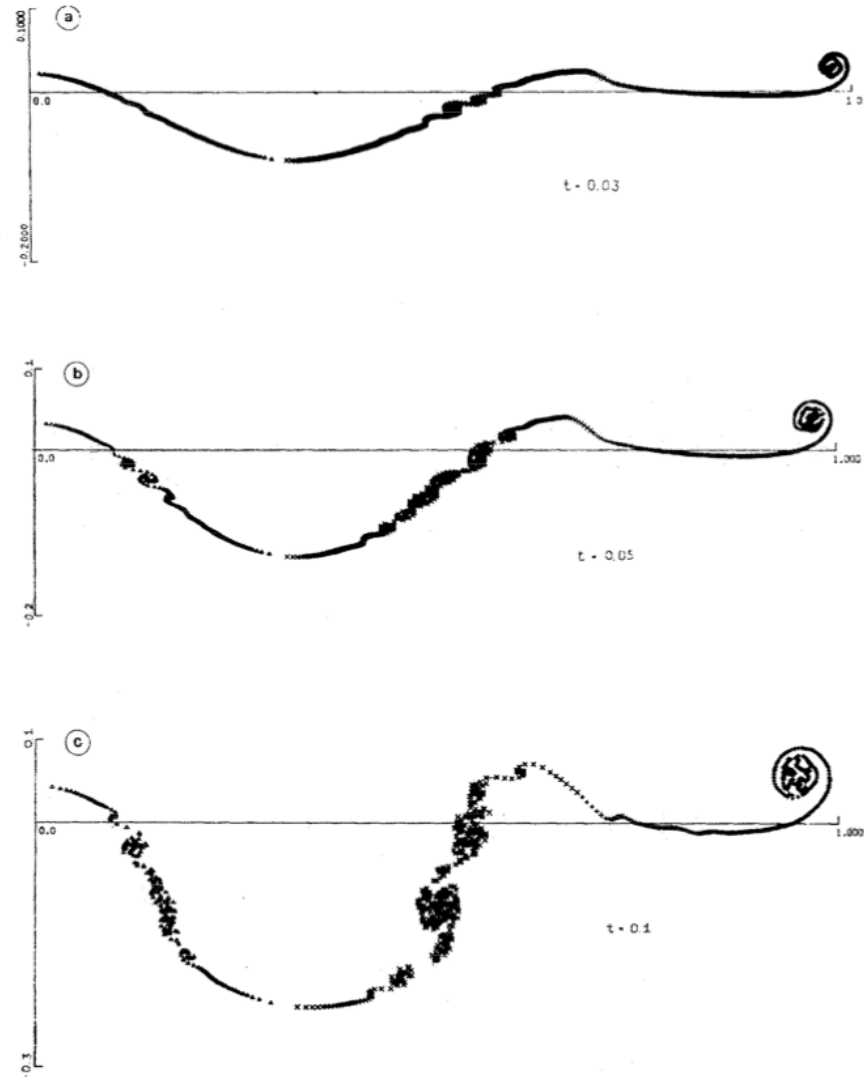
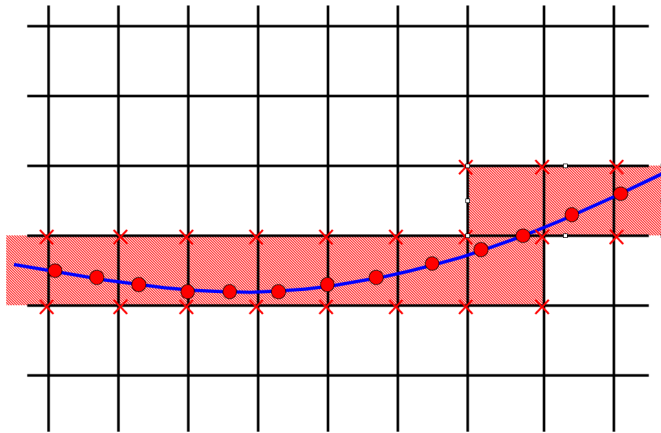


FIG. 8. Vorticity distribution for the roll up behind a wing with with a flap deployed at different time levels. The grid is 129×129 . (a) $t = 0.03$, (b) $t = 0.05$, (c) $t = 0.1$, (d) $t = 0.15$, (e) $t = 0.2$, (f) $t = 0.3$.

3- extension tridimensionnelle

O. Bunemann, B. Couet, A. Leonard (1981)

les « filaments » tourbillonnaires sont transportés.

$$L(t_0) = \{ \underline{x}_0 / L_0(\underline{x}_0) = 0 \}$$

$$L(t) = \{ \underline{x} = \underline{X}(\underline{x}_0, t) / \underline{x}_0 \in L(t_0) \}$$

le tourbillon reste partout tangent à $L(t)$

transport :

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) + \underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = \underline{0}$$

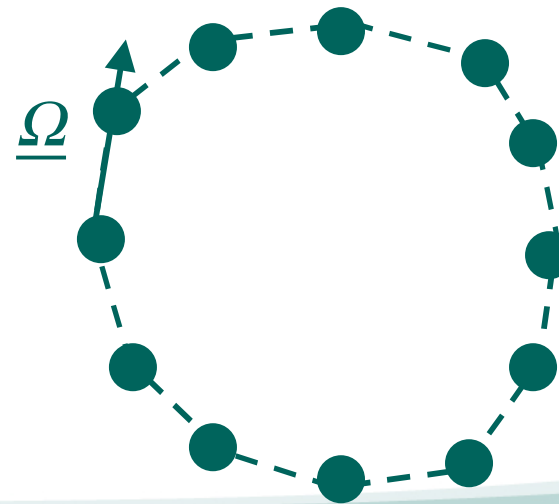
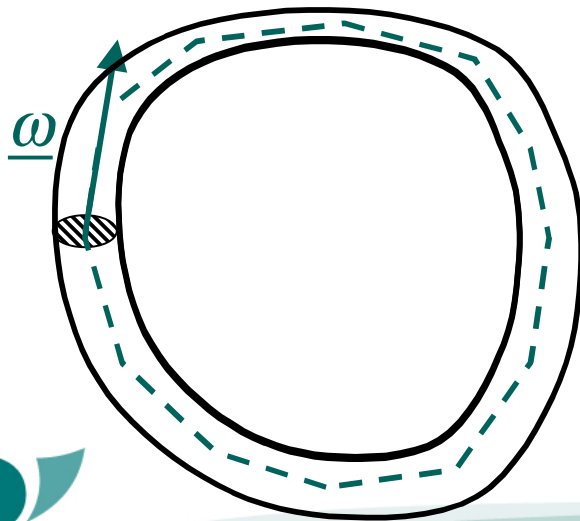
$$\text{div}(\underline{u}) = 0, \quad \text{rot}(\underline{u}) = \underline{\omega}$$

3- extension tridimensionnelle

conséquence :

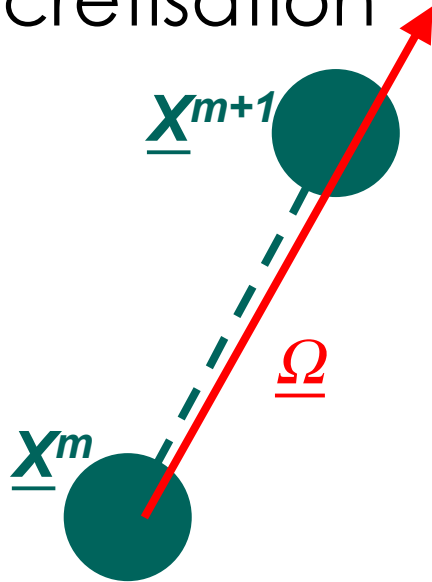
la particule tourbillonnaire n'est plus une solution élémentaire.

la discrétisation doit être compatible : les filaments sont transportés « en bloc »



3- extension tridimensionnelle

discrétisation



$$\underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = \underline{\omega} \cdot \left(\overline{\overline{\text{grad}(\underline{u})}} \right) \\ \approx \underline{\omega} \cdot \frac{U(\underline{X}^{m+1}) - U(\underline{X}^m)}{\|\underline{X}^{m+1} - \underline{X}^m\|}$$

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) + \underline{\text{div}}(\underline{\omega} \otimes \underline{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\underline{X}_i}{dt} \approx \underline{u}_h(\underline{X}_i, t) \\ \frac{d\underline{\Omega}_i}{dt} = \underline{\Omega}_i \cdot \frac{U(\underline{X}^{m+1}) - U(\underline{X}^m)}{\|\underline{X}^{m+1} - \underline{X}^m\|} \end{cases}$$

3- extension tridimensionnelle

VIC 3D :

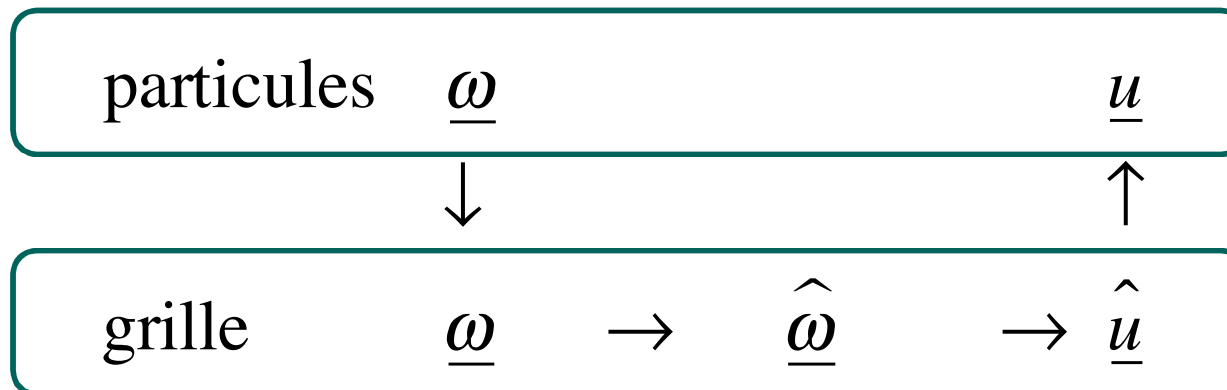
- décomposition en filaments :

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \sum_i \Gamma_i \oint \delta(\underline{x} - \underline{x}_i(s, t)) \frac{\partial \tau_i}{\partial s} ds$$

- un filaments peut « remplir » le domaine de calcul
- nécessité d'une approche globale de la projection particule grille
- Fourier ...

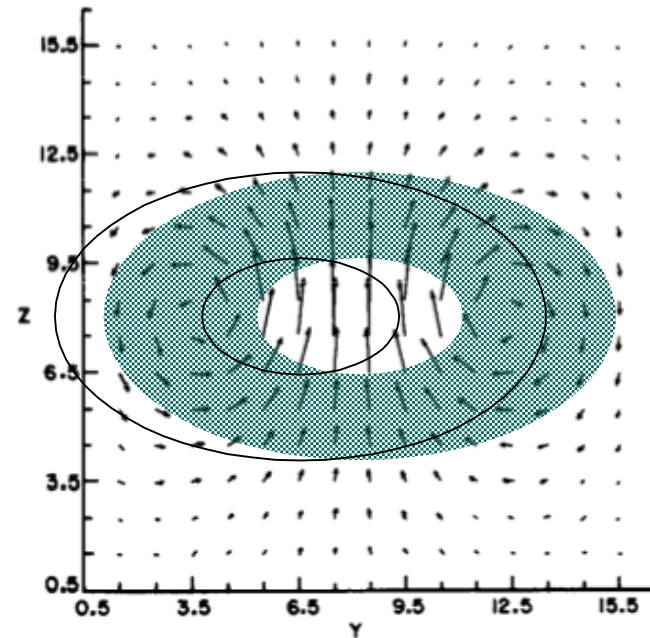
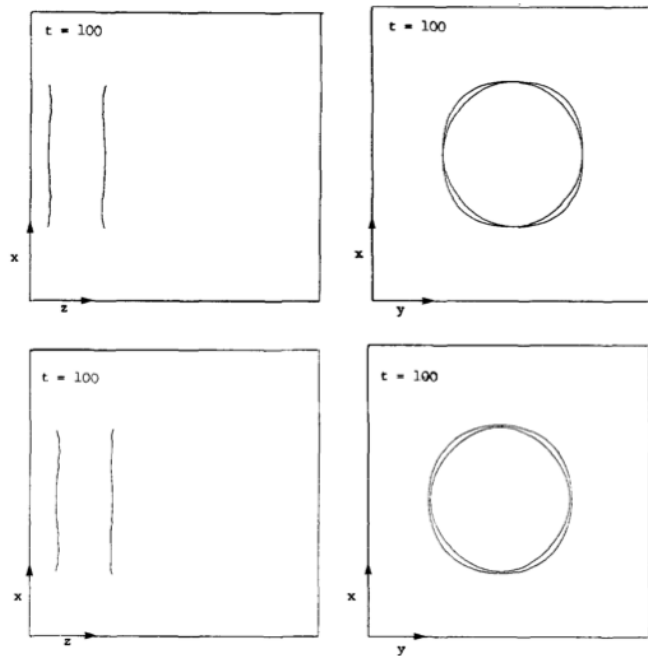
3- extension tridimensionnelle

- transformée de Fourier discrète globale : coût CPU trop élevé → approximation locale \approx projection locale
- déformation calculée directement sur les filaments.



3- extension tridimensionnelle

VIC-3D : anneau tourbillonnaire



interaction de deux anneaux vitesse dans un plan méridien

4- Navier Stokes

Chorin (1974)

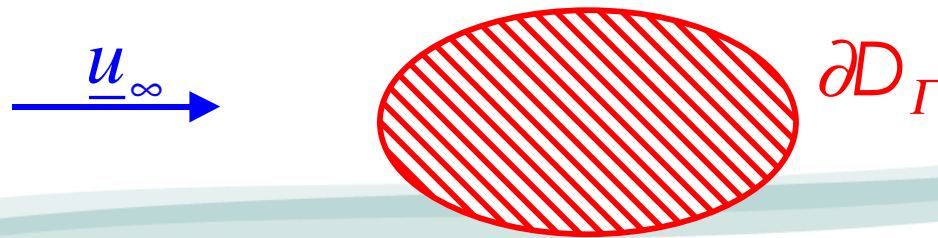
2 problèmes

- diffusion \rightarrow transport du tourbillon

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) = \nu \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{\omega}))$$

- conditions d'adhérence à la paroi

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \rightarrow \underline{u} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \\ \underline{u} \cdot \underline{\tau} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial D_{\Gamma}$$



4- Navier Stokes

solutions :

1- modélisation de la diffusion par une « marche aléatoire »

$$dX = \underline{u}dt + \eta$$

η : gaussien avec $\sigma=2\sqrt{\nu\delta t}$

2- $\underline{u}\cdot\underline{n}=0$: construction d'un potentiel φ :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left(\underline{\text{grad}}(\varphi) + \underline{u}_\omega \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D_\Gamma \end{cases}$$

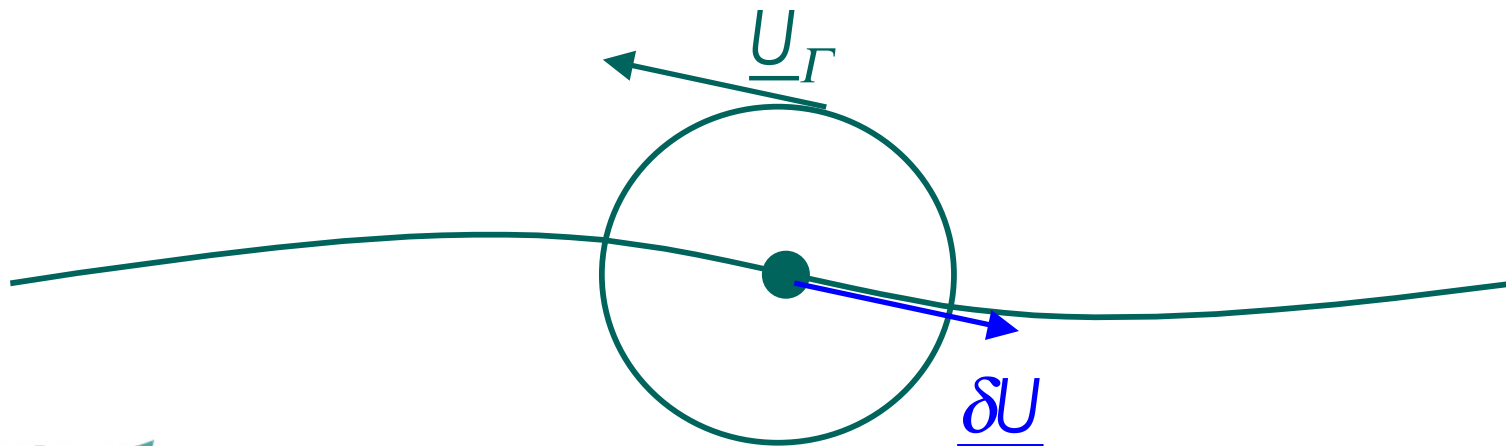
4- Navier Stokes

3. $\underline{u} \cdot \underline{\tau} = 0$: nouvelles particules $(\underline{X}_\Gamma, \underline{\Omega}_\Gamma)$:

$$\underline{u}_\Gamma = \underline{\Gamma} \wedge \underline{r} / 2\pi \|\underline{r}\|^2$$

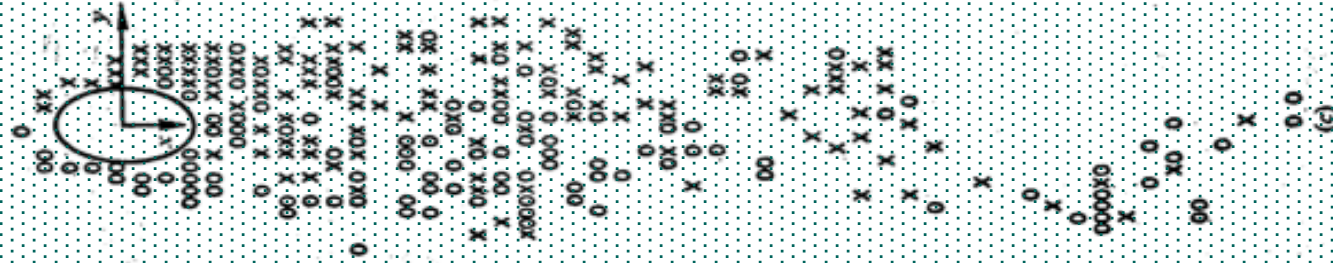
correction locale :

$$(\underline{u}_\Gamma + \underline{\delta u}) \cdot \underline{\tau} = 0 \Rightarrow \underline{\Gamma} = -\frac{\underline{\delta u} \cdot \underline{r}}{2\pi \|\underline{r}\|^2}$$



4- Navier Stokes

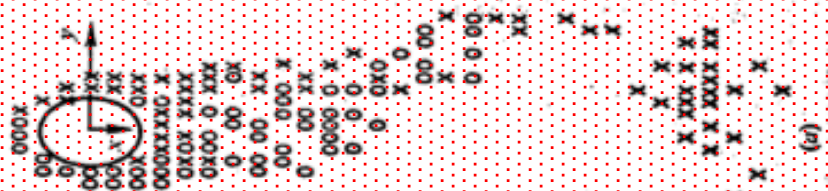
Re=10², t=16



Re=10³, t=24



Re=10³, t=12



4- Navier Stokes

extension VIC : Jollès (1991)

particules

$$\underline{X}_i, \underline{\Omega}_i$$

$$\frac{d\underline{X}_i}{dt} = \underline{U}_i$$

$$\frac{d\underline{\Omega}_i}{dt} = \delta \underline{\Omega}_i$$

→

grille

$$\underline{\omega}_{kl} = \sum_j \underline{\Omega}_j W(\underline{X}_j - \underline{x}_{kl})$$

↓

$$\Delta \underline{\psi}_{kl} = -\underline{\omega}_{kl}$$

←

$$\underline{u}_{kl} = \text{rot}(\underline{\psi}_{kl})$$

↓

$$\frac{\partial \underline{\omega}_{kl}}{\partial t} = \nu \Delta \underline{\omega}_{kl}$$

←

$$\delta \underline{\omega}_{kl} = \delta t \frac{\partial \underline{\omega}_{kl}}{\partial t}$$

4- Navier Stokes

conditions aux limites :

- écrites sur les particules!
- renormalisation (Jingold et Monaghan)

– fonction unité : $I(\underline{x}) = \sum_j V_j \zeta_\varepsilon(\underline{X}_j - \underline{x}) \stackrel{?}{=} 1$

– volume « modifié » : $V_j / \sum_j V_j \zeta_\varepsilon(\underline{X}_j - \underline{x}) = 1$

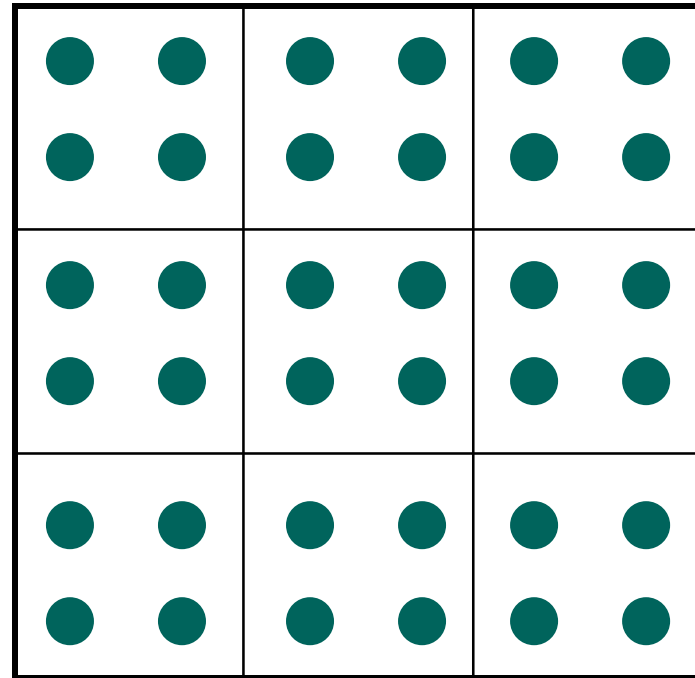
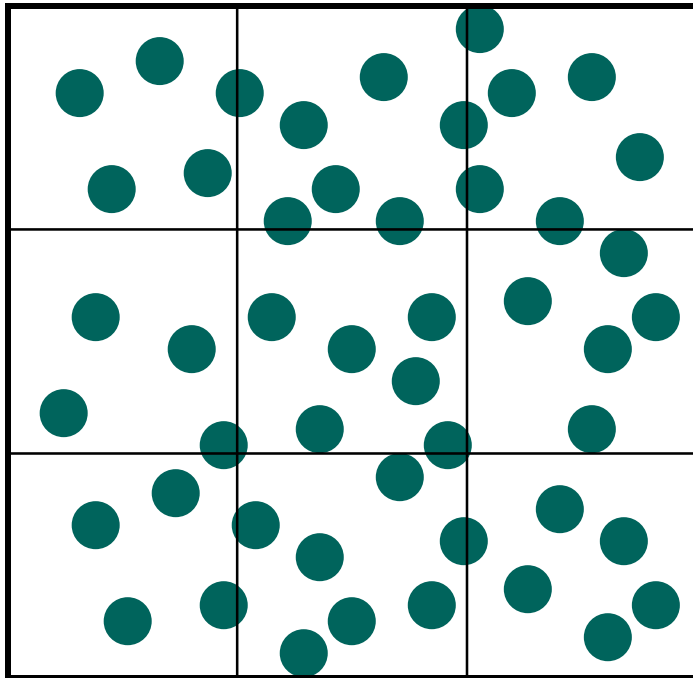
– tourbillon « renormalisé » : $\underline{\omega}_{kl} = \sum_j V_j \Omega_j \zeta_\varepsilon(\underline{X}_j - \underline{x}_{kl})$

tient compte des fluctuations (discrètes) de la densité particules/maille

4- Navier Stokes

- remaillage

objectif : densité particules/mailles \approx constante



4- Navier Stokes

- projection particule/grille et construction de $\underline{\omega}_{kl}$

$$\underline{\omega}_{kl} = \sum_j \Omega_j \zeta_\varepsilon(\underline{X}_j - \underline{x}_{kl})$$

- projection grille/particule sur les nouvelles positions

$$\tilde{\Omega}_j = \sum_{kl} \underline{\omega}_{kl} \zeta_\varepsilon(\tilde{\underline{X}}_j - \underline{x}_{kl})$$

- projection particule/grille et construction de $\tilde{\underline{\omega}}_{kl}$

$$\tilde{\underline{\omega}}_{kl} = \sum_j \tilde{\Omega}_j \zeta_\varepsilon(\tilde{\underline{X}}_j - \underline{x}_{kl})$$

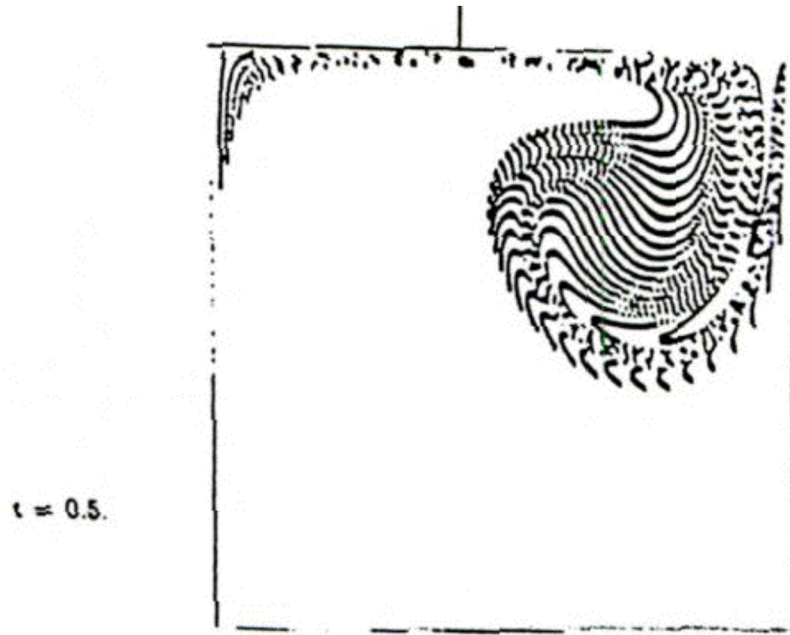
- mesure de l'erreur : $\tilde{\underline{\omega}}_{kl} - \underline{\omega}_{kl}$

→ correction d'anti-diffusion

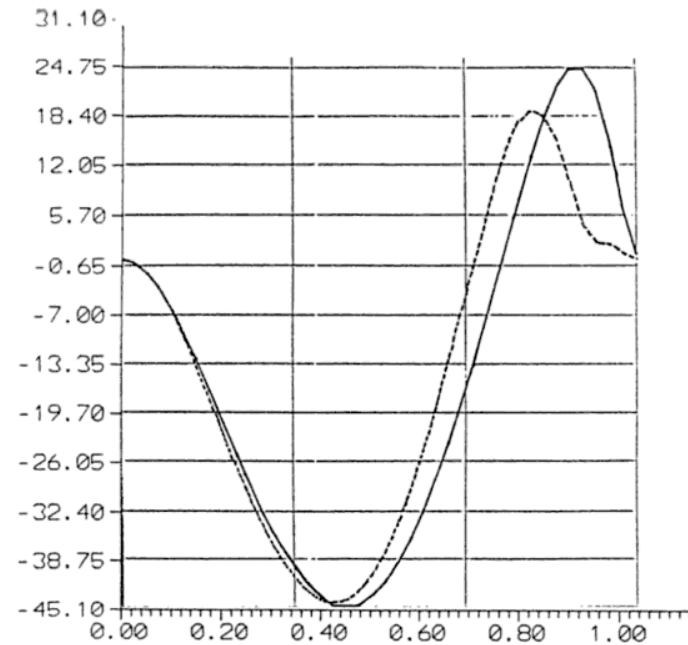
→ identique à la fonction M4'

4- Navier Stokes

application : cavité entraînée « stationnaire »



position des particules



tourbillon à la frontière supérieure

5- frontières immergées

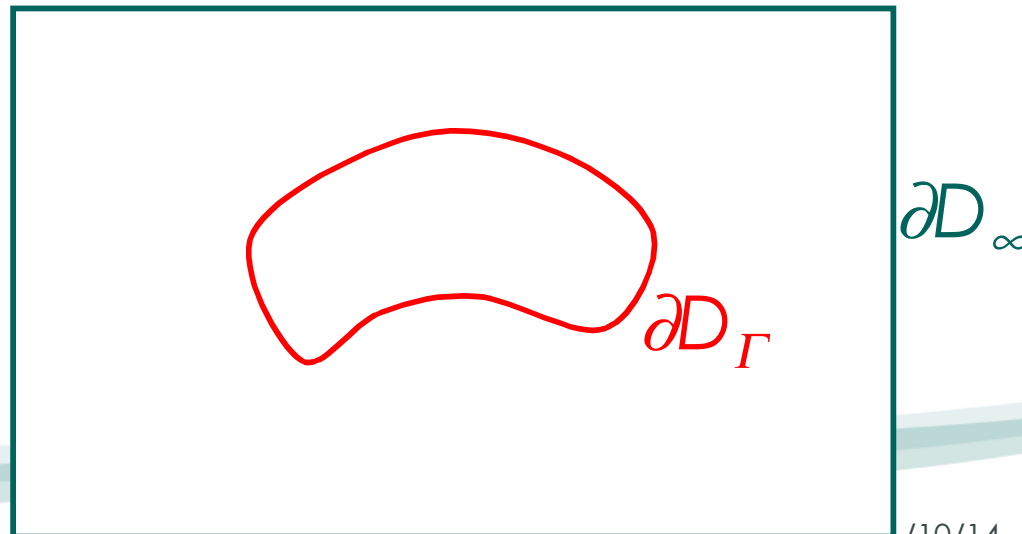
Peskin (1980)

Problème : écoulements biologiques

→ frontières mobiles/ maillage fixe

≈ frontières fixes/ maillage mobile

≈ frontières -fixes-mobiles-/ particules



5- frontières immergées

Solution :

efforts sur la paroi \rightarrow effort sur le fluide

$$\underline{U}(\underline{x}_\Gamma, t) = \underbrace{\underline{U}_\Gamma(\underline{x}_\Gamma, t)}_{\text{donnée}} \rightarrow \begin{cases} \underline{f}(\underline{x}, t) \\ \partial D_\Gamma \subset \text{support}(\underline{f}) \end{cases}$$

\rightarrow équation de transport modifiée

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{\omega}) = \underline{\text{rot}}(\underline{f}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\underline{X}}{dt} = \underline{u} \\ \frac{d\underline{\Omega}}{dt} = \iiint_P \underline{\text{rot}}(\underline{f}) d\underline{x} \end{cases}$$

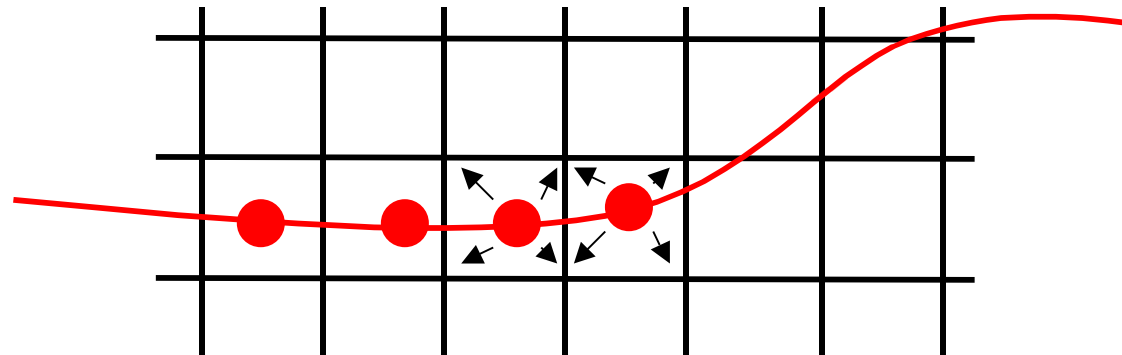
5- frontières immergées

1. sur la frontière ∂D_Γ : force \Leftrightarrow tourbillon

$$\underline{F}_\Omega \approx \underline{\Omega} \wedge \underline{\delta U} \Rightarrow \underline{\Omega} \approx \frac{\underline{F}_\Omega \cdot \underline{\delta U}}{\|\underline{\delta U}\|^2}$$

$\underline{\delta U}$: distance « vitesse calculée/vitesse cible »

2. répartition de \underline{f} sur le maillage



5- frontières immergées

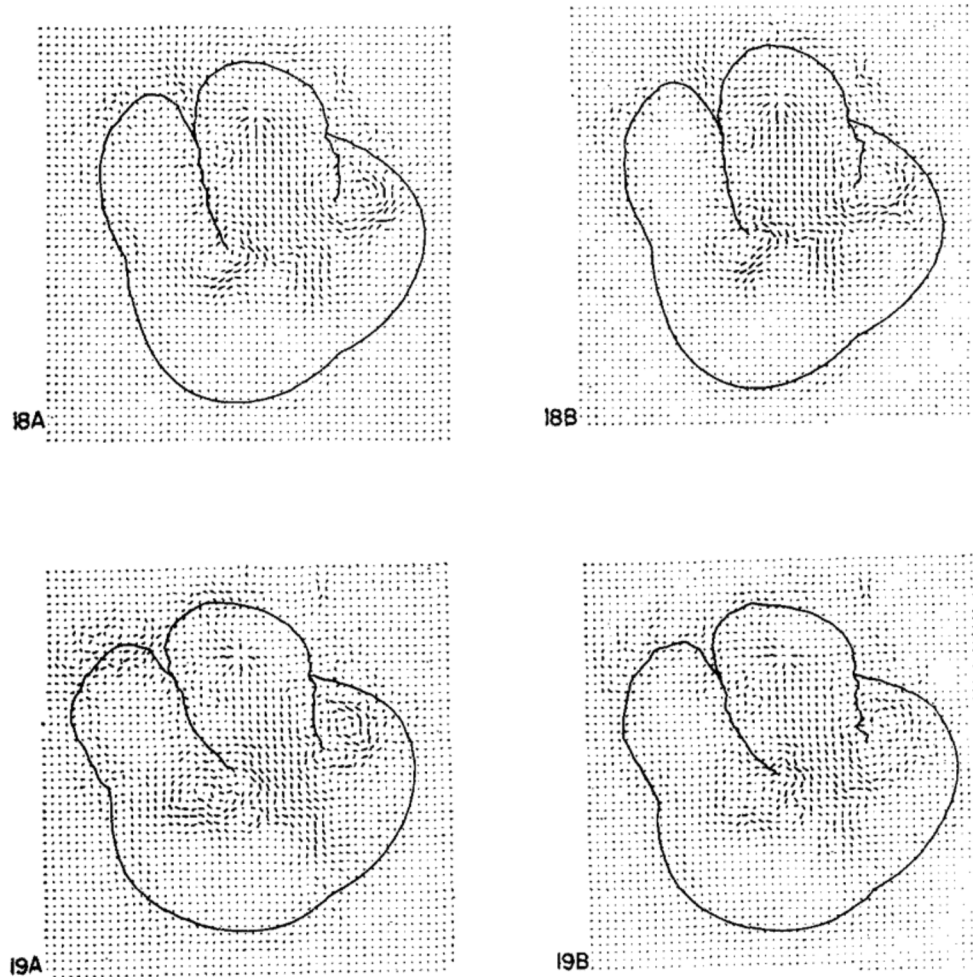
2- décomposition du problème

- création de particules sur $\partial D_\Gamma \rightarrow \underline{\omega}_j$
- tourbillon sur la grille : $\underline{\omega}_{ij}$
- projection particules $\rightarrow \underline{\omega}_\varepsilon$
- calcul de la fonction de courant :

$$\Delta \underline{\psi} = -(\underline{\omega}_{ij} + \underline{\omega}_\varepsilon)$$

le champ de vitesse vérifie les conditions
aux limites sur ∂D_Γ

5- frontières immergées



FIGS. 41-19—*Continued*

FIGS. 18A, 19A. One-half the Reynolds number of the human heart (*continued*).
FIGS. 18B, 19B. The Reynolds number of the human heart (*continued*).

II. 3 bonnes raisons d'utiliser la méthode PIC

1- temps CPU

Greengard-Rocklin (1986),

décroissance de la vitesse $\approx r^{-2}$

→ on peu « oublier » les détails au loin

- plusieurs niveau de particules

→ arborescence = « *tree code* »

- complexité = $N \text{ Log } N$

- efficace en 2D, plus délicat en 3D

1- temps CPU

VIC-3D particules :

Rehbach (1977)

calcul direct du gradient de vitesse :

$$\underline{\Omega}_i \cdot \overline{\text{grad}}(\underline{u}(\underline{X}_i, t)) \approx \sum_j \frac{\underline{\Omega}_j \wedge \underline{\Omega}_i}{4\pi \|\underline{X}_j - \underline{X}_i\|^3} - 3 \frac{\underline{\Omega}_j \wedge (\underline{X}_j - \underline{X}_i) (\underline{\Omega}_i \cdot (\underline{X}_j - \underline{X}_i))}{4\pi \|\underline{X}_j - \underline{X}_i\|^5}$$

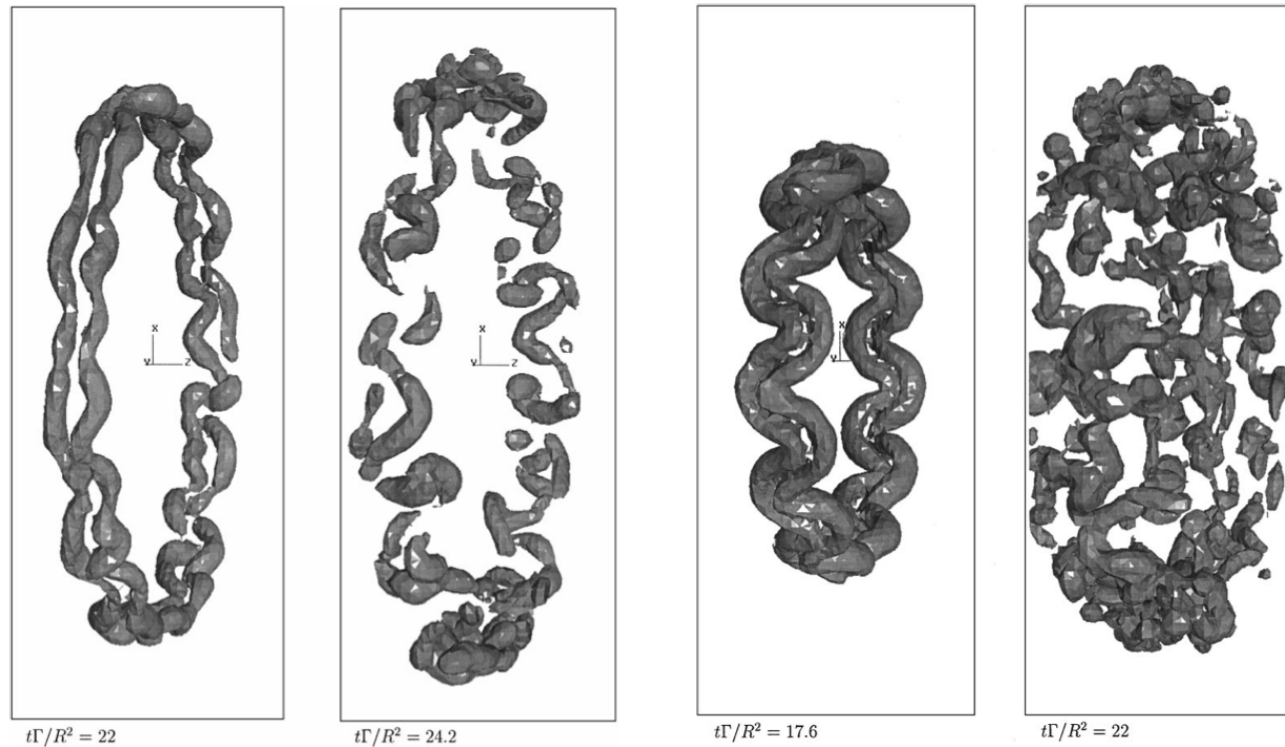
conséquence :

- le lien entre les particules est implicite
- VIC → complexité : $\alpha M + \beta N \text{ Log } N$

Adouobo (1998)

1- temps CPU

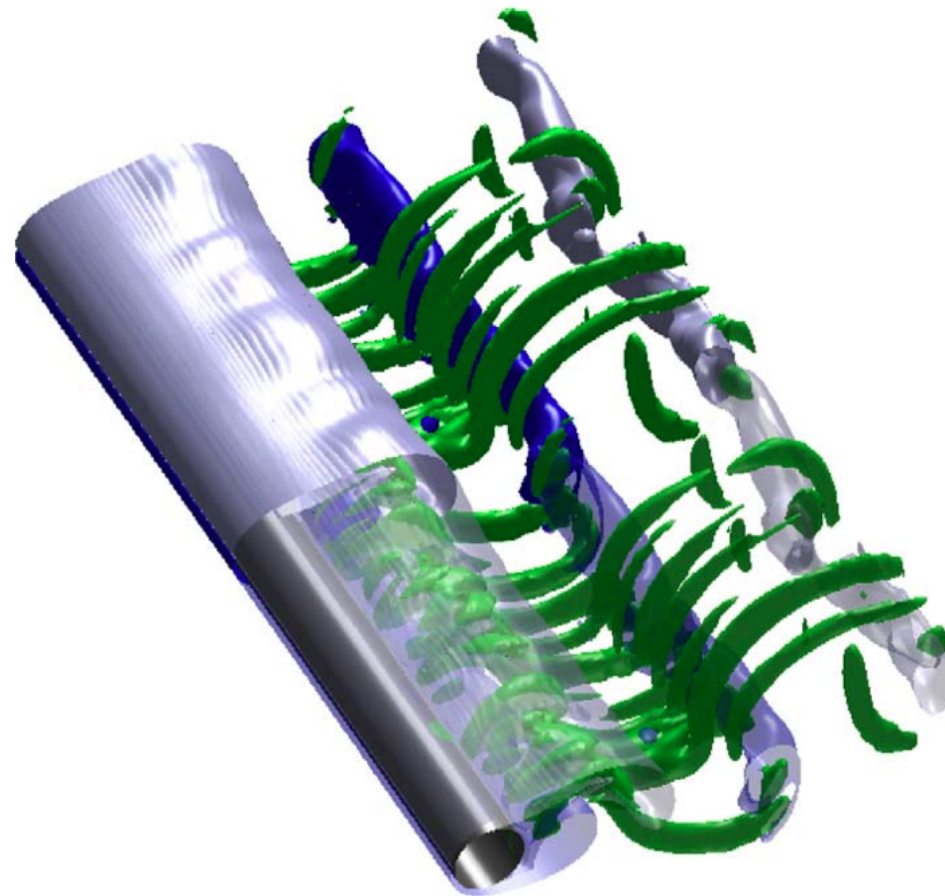
VIC-3D : [Mansfield et al \(1999\)](#)



interaction d'anneaux turbulents (filtrage LES)

1- temps CPU

VIC 3D : Cottet-Poncet 2003

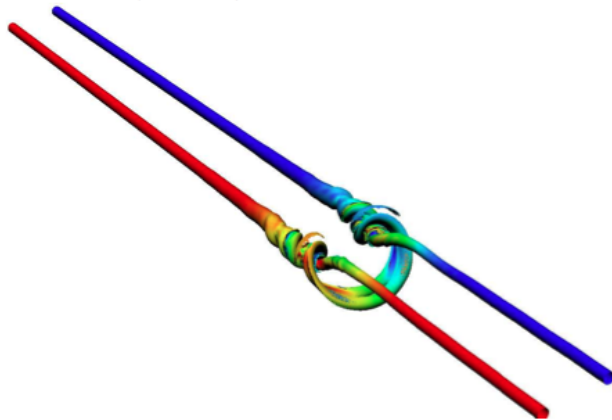


1- temps CPU

Winkelmans (2006)

- calcul des conditions aux limites externes par « tree-code »
- calcul de l'écoulement par VIC

$$tu_{\theta, \text{max}}/b = 2.7 \left(t_{\frac{\Gamma_1}{2\pi b_0}} = 0.41 \right)$$



$$tu_{\theta, \text{max}}/b = 4.0 \left(t_{\frac{\Gamma_1}{2\pi b_0}} = 0.62 \right)$$

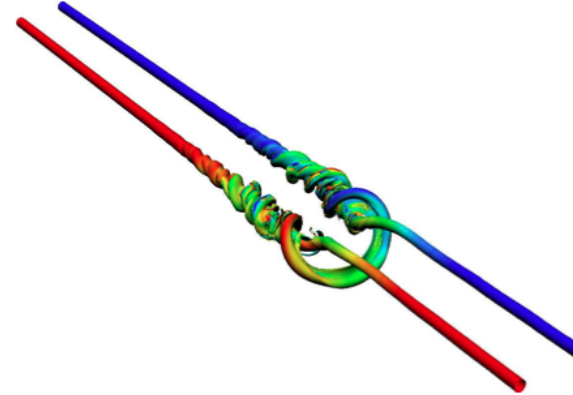


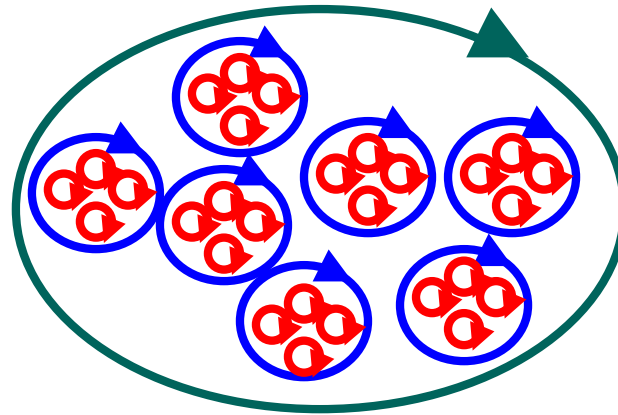
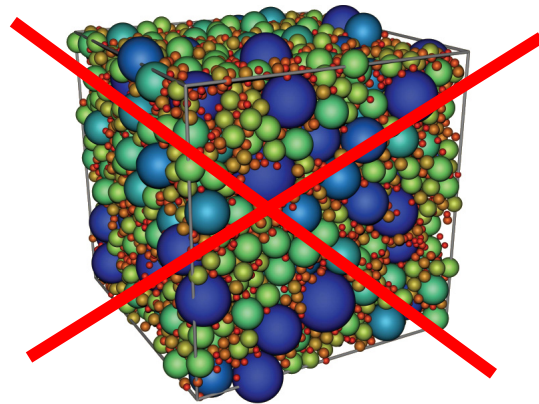
Figure 5.21: [Cont'd]

..... vers le milliard de particules

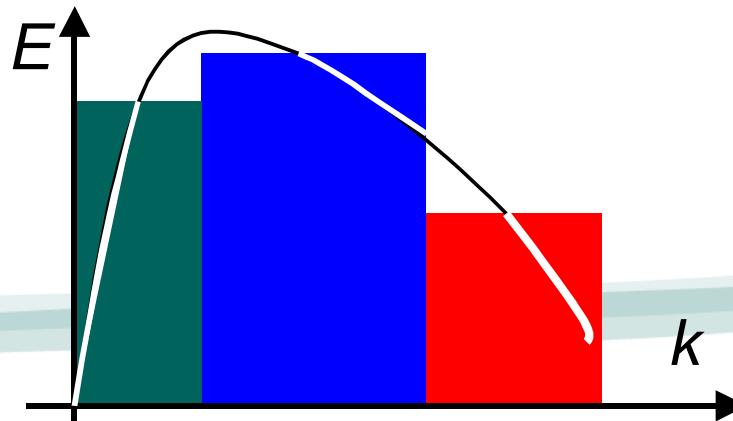
2- Multi-échelle

turbulence = multi-échelle

→ particules de différents diamètres

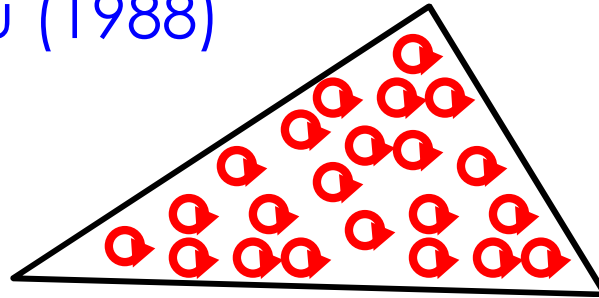


- une autre vision du tree-code : S.H (1983)



2- Multi-échelle

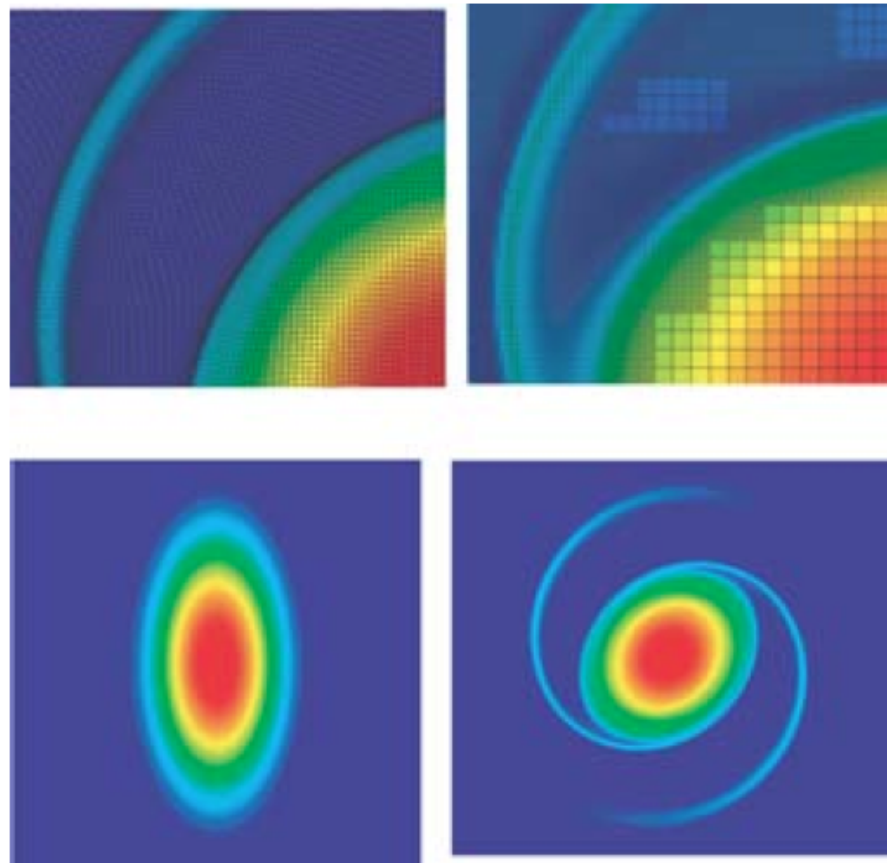
- modélisation lagrangienne de sous-maille + E.F. Pironneau (1988)



- particules à volumes variables : de Kuwahara (1974) à Cottet (2000)
 - évolution du paramètre ε
 - actualisation des volumes (jacobien - Monaghan 1977)

2- Multi-échelle

- décomposition de domaine [Bergdorf\(2004\)](#)
 - \Leftrightarrow évolution discrète de ε



3- Multi-physique

- Méthodes Hybrides : [Harlow \(1964\)](#)
 - MAC : particules transportant la masse
 - hybride → 2 types de discrétisation?

discrétisation adaptée

- **à l'échelle**

ex : modèle de sous-maille ..

- **à la nature physique du phénomène**

ex : transport de masse/ transport d'énergie

- **à sa nature mathématique**

ex : transport/ diffusion

3- Multi-physique

- à l'échelle : [Jollès \(1990\)](#)
 - décomposition turbulence ambiante/
gros tourbillons
- ex : décroissance de sillage

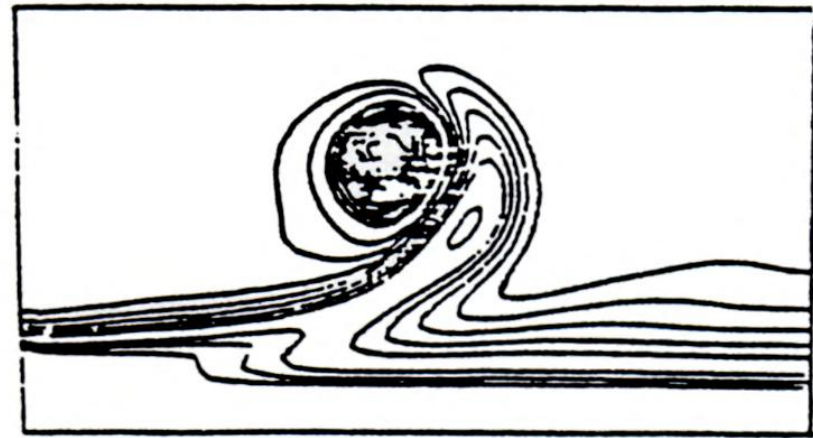
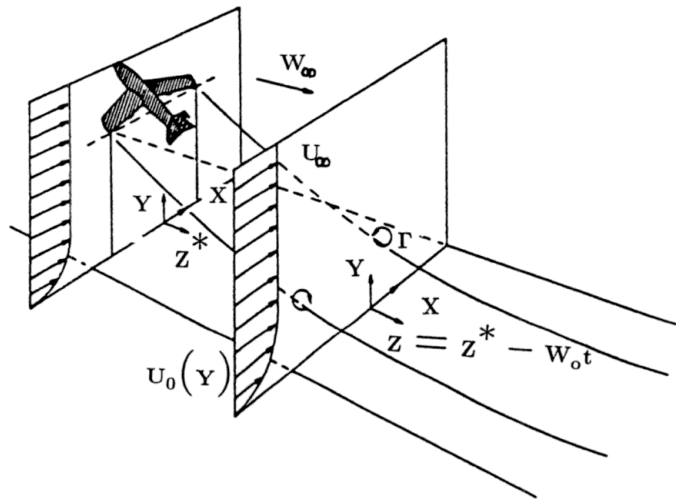
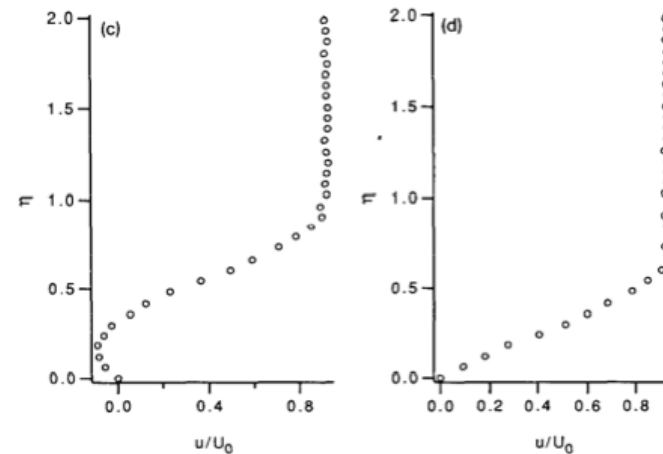
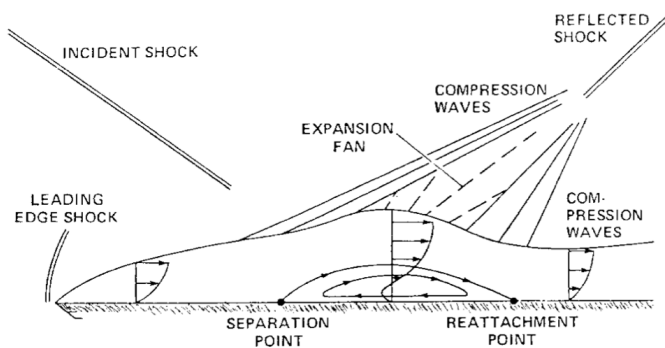


FIGURE 6. Mixed method: Iso-vorticity lines

3- Multi-physique

- à la physique : Sod (1991), Pironneau & Mas-Gallic (1993)
 - compressible (méthode de lignes)/
incompressible (méthode vortex)
 - ex : interaction choc/couche limite



3- Multi-physique

- à la nature « mathématique » :
 - décomposition transport/ diffusion

déjà fait :

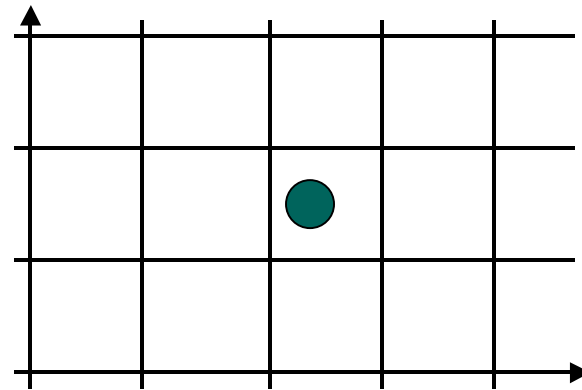
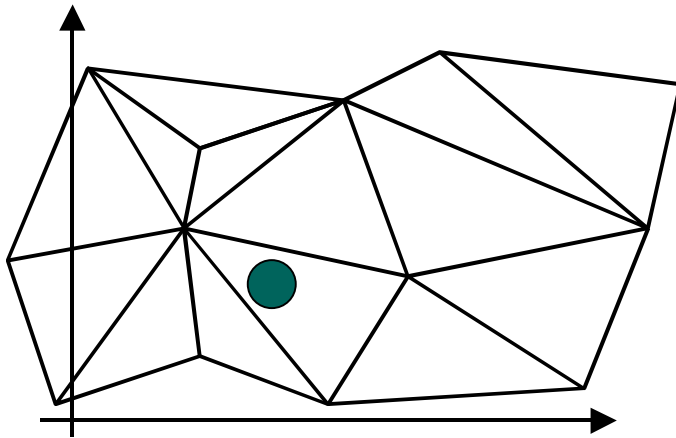
- particules + « monte-carlo » : [Chorin \(1974\)](#)
- PIC : particules + différences finies : [Jollès \(1990\)](#)
- Particules + Elements Finis : [Bardos et al \(1981\)](#), [Russo \(1994\)](#)

III. à faire pour demain?

1- maillage non structuré

problèmes :

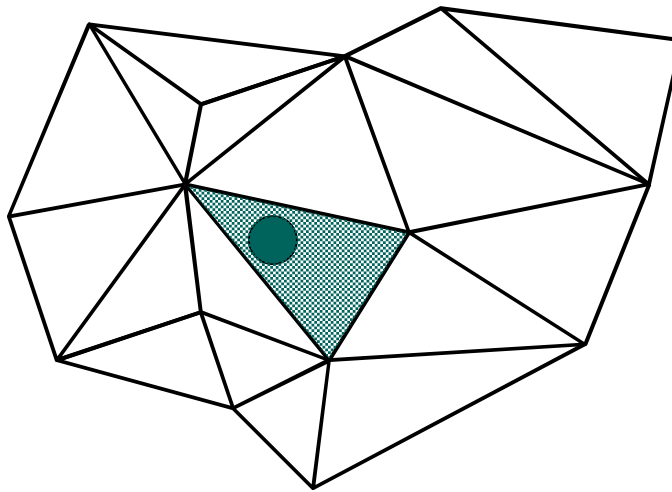
1. repérage des particules sur le maillage



La localisation par $E(x/\delta x)$ ne marche plus.

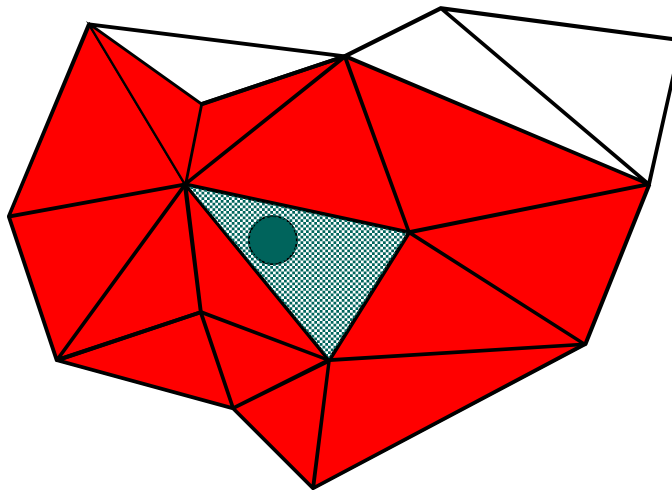
1- maillage non structuré

2. distorsion associée à la projection



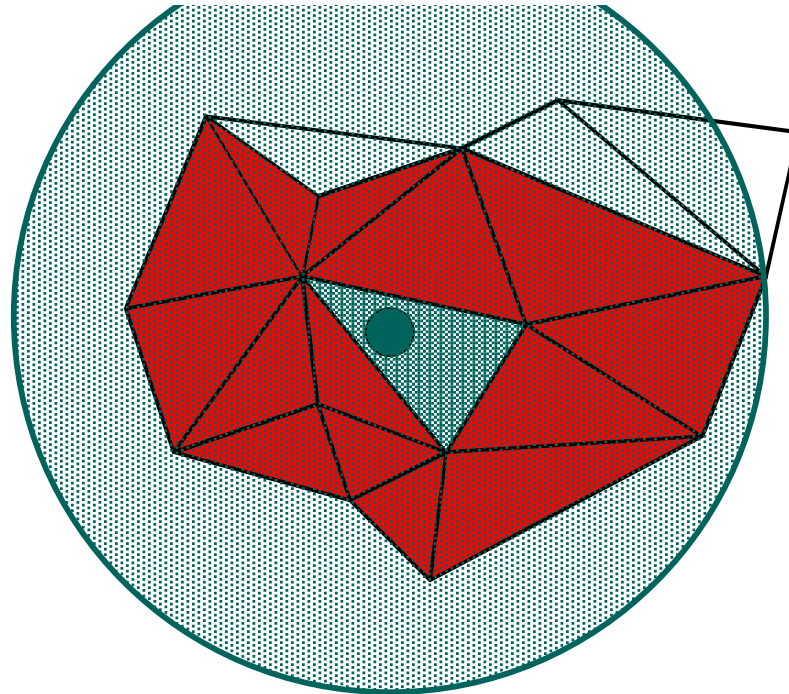
1- maillage non structuré

2. distorsion associée à la projection



1- maillage non structuré

2. distorsion associée à la projection

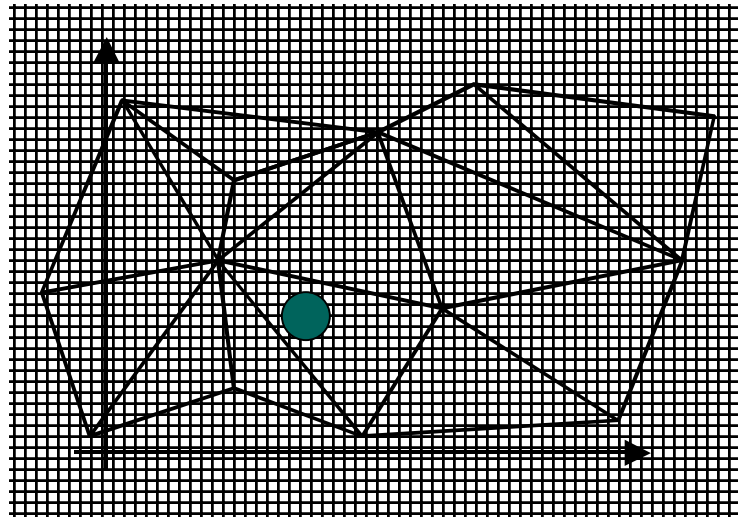


l'opérateur de projection locale est une
(mauvaise) approximation de Dirac

1- maillage non structuré

localisation : solutions

1.1 repérage particule/ grille : [Beaugendre\(2012\)](#)

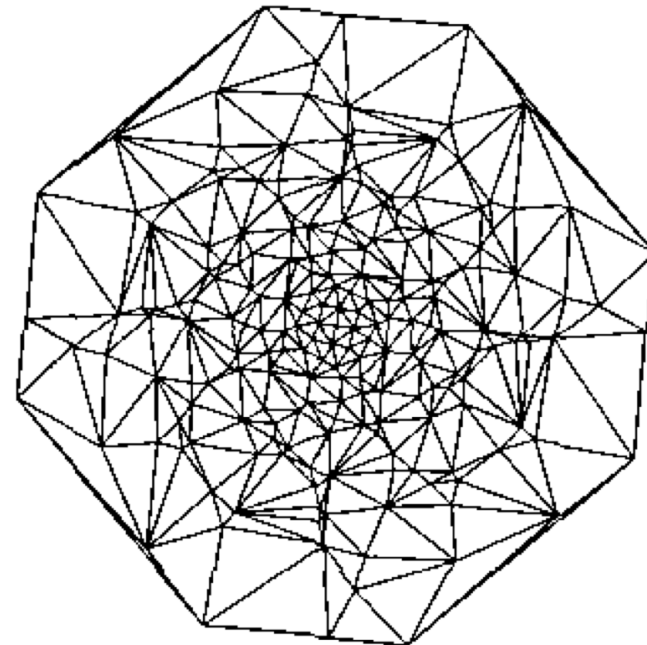


repérage sur une grille cartésienne fine
association éléments/ grille cartésienne

1- maillage non structuré

1.2 supprimer le(s) problème(s) : Russo (1994)

- construction d'un maillage Voronoi sur les particules
 - les particules sont automatiquement localisées
 - opérateur de projection réduit à l'identité



1- maillage non structuré

Distorsion : solution

- utiliser un projecteur indépendant du maillage : [Beaudoin \(2014\)](#)
 - remplace la fonction de correction W par ζ_ε
 - perte de la conservation \rightarrow correction
 - ...

2- Smooth Particle Aerodynamics

PIC-SPH : [Machrouki \(2008\)](#)

PIC [Christiansen \(1074\)](#) + SPH [Jingold Monaghan \(1977\)](#)

- formulation vitesse-pression

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}}(p) = \nu \Delta \underline{u}$$

$$\text{div}(\underline{u}) = 0$$

- incompressibilité → compressibilité artificielle
(vitesse du son ≈ 1000 m/s)

2- Smooth Particle Aerodynamics

objectifs :

- 1- résoudre le problème de la compressibilité
- 2- réduire le temps CPU

2 problèmes :

- Navier-Stokes → équation **S** de Poisson
- conditions aux limites en vitesse **et** pression!

2- Smooth Particle Aerodynamics

conditions aux limites en vitesse : - Pironneau,
Achdou & Salvi (1998)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta \underline{\psi}}{\partial t} + \underline{\text{div}}(\underline{\text{rot}}(\underline{\psi}) \otimes \Delta \underline{\psi}) + \underline{\text{div}}(\Delta \underline{\psi} \otimes \underline{\text{rot}}(\underline{\psi})) = \nu \Delta^2 \underline{\psi} \\ \underline{\psi} = \underline{\psi}_\Gamma, \quad \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial n} = g_\Gamma \quad \text{sur } \partial D \end{array} \right.$$

en 2D :

$$\underline{u} = \underline{u}_\Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \tau} = \underline{u}_\Gamma \cdot \underline{n} \\ \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial n} = \underline{u}_\Gamma \cdot \underline{\tau} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\psi} = \underline{\psi}_\Gamma, \\ \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial n} = g_\Gamma \end{array} \right\}$$

2- Smooth Particle Aerodynamics

équations intégrales de frontière :

$$\psi_\gamma^{n+1}(\underline{x}) = \eta \iint_{\partial\Omega} \left(q_2(\underline{x}') N(\underline{x}, \underline{x}') - q_1(\underline{x}') \frac{\partial N(\underline{x}, \underline{x}')}{\partial n'} \right) ds'$$

- $\eta = \nu \delta t$
- q_1, q_2 : potentiels de simple et double couche
- N : fonction de Green

$$N(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \log(|\underline{x} - \underline{x}'|) + K_0 \left(\frac{|\underline{x} - \underline{x}'|}{\sqrt{\eta}} \right)$$

2- Smooth Particle Aerodynamics

conditions aux limites en pression =
condition de compatibilité des champs

Rehbach-Cantaloube (1985)

équation intégrale de frontière

$$h = h_\omega + h_\gamma = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2$$

$$h_\omega(\underline{x}) + \int_{s_\infty} h_\omega(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\underline{x}, \underline{x}') ds' = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\omega}' \wedge \underline{u}') G(\underline{x}, \underline{x}') dv'$$

$$\frac{1}{2}h_\gamma(\underline{x}) + \int_{s_0} h_\gamma(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n_y}(\underline{x}, \underline{x}') ds = \frac{1}{2}h_\omega(\underline{x})$$



$$+ \int_{s_0} \left(G(\underline{x}, \underline{x}') \frac{\partial h_\omega}{\partial n'}(\underline{x}') - h_\omega(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\underline{x}, \underline{x}') \right) ds'$$

2- Smooth Particle Aerodynamics

remarques :

- permet de vérifier simultanément toutes les conditions aux limites
- tend vers les limites
 - stationnaire (ou Stokes) quand $\eta \rightarrow \infty$
 - fluide parfait quand $\eta \rightarrow 0$
- extension 3D à faire

2- Smooth Particle Aerodynamics

exemple de la rupture de barrage

